小学数学 计算

秘籍

四年级

学而思研发中心 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

小学数学计算秘籍. 四年级/学而思研发中心编著. —北京:电子工业出版社,2015.1
ISBN 978-7-121-24407-0

Ⅰ. ①小…　Ⅱ. ①学…　Ⅲ. ①小学数学课—习题集　Ⅳ. ①G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 222317 号

策划编辑:蔡　葵
责任编辑:蔡　葵　　　　文字编辑:刘　珊
印　　刷:
装　　订:
出版发行:电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本:787×1 092　1/16　印张:5.25　字数:127.9 千字
版　　次:2015 年 1 月第 1 版
印　　次:2016 年 1 月第 3 次印刷
定　　价:27.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换. 若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888.

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn.

服务热线:(010)88258888.

学而思图书策划委员会

前　言

从《小学数学计算秘籍》系列丛书开始酝酿到着手编写，学而思研发中心集思广益，进行了广泛调研，听取了广大学生和家长的需求，采纳了众多一线教师的建议，在制定大纲后对编写大纲进行了反复修改，并邀请一线名师参与丛书的编写，确保图书质量。

《小学数学计算秘籍》系列丛书共六册，一至六年级每年级一册，从基础知识入手，着重于归纳秘籍。从课本的计算知识引申到数学思维，不局限于教材内容，有利于培养学生的发散思维，拓宽知识面，更好地理解数学，更快、更有效地学习数学。

《小学数学计算秘籍》系列丛书具有以下特色。

1. 权威团队

本丛书汇集了学而思众多名师多年的教学沉淀。在解题方法方面，注重从基础上升到方法、技巧。书中对经典例题解释透彻，注重一题多解、多题一解、横向发散、纵向变通。

2. 视频讲解

本丛书采用了国内教辅市场新的教学形式——视频教学。我们将书中的部分例题录制成网络高清讲解视频，同学们可以通过直播和录播两种途径观看视频，方便同学们更直观地进行学习。同学们可通过书中的防伪码登录 http://zt.xueersi.com/xiaoshujs4 进行观看。

3. 论坛互动

同学们只需登录论坛 http://book.eduu.com/peiyou，单击《小学数学计算秘籍(四年级)》"新书答疑"按钮，即可实现与老师互动、与同学们交流心得体会，以解决在使用《小学数学计算秘籍(四年级)》一书时所遇到的问题。

4. QQ 答疑

我们为同学们建立了答疑 QQ 群，方便与编写老师进行及时的沟通和交流互动。同学们可通过 QQ 加入 QQ 群"学而思书籍服务群"，QQ 群号为 324414614。

除《小学数学计算秘籍》系列图书外，学而思研发中心还同步推出《小学数学课内培优跟踪练习册》系列辅导丛书，给同学们提供全方位的学习指导。

在本书编写过程中，我们征求了全国各地老师和教研人员的意见，在此表示衷心的感谢。

我们虽秉承着"打造精品书籍，让学生高效学习"的精神编写此书，但百密一疏，不妥之处在所难免。同学们在使用本书过程中如发现任何问题或者提出改善性意见，均可与我们联系。

联系方式：xiaoxueshuji@100tal.com

学而思研发中心

目录

第1讲　特殊的乘法

秘籍导航

在做特殊数的计算题时,需掌握一些特殊的技巧来计算,达到巧算的目的。

秘籍攻略

秘籍 1　同补的速算

同补,又叫作头同尾合十,通常指的是两位数乘两位数,十位数字相同,个位数字相加得10,称为同补,即 $\overline{ab}\times\overline{ac}$,并且 $b+c=10$,则 $\overline{ab}\times\overline{ac}=a\times(a+1)\times100+b\times c$。简单地说,乘积的末两位是由 $b\times c$ 得到的,乘积前两位由 $a\times(a+1)$ 得到的。到底是为什么呢?我们一起来推导一下:

$$
\begin{aligned}
\overline{ab}\times\overline{ac} &= (10a+b)\times(10a+c)\\
&= 10a\times(10a+c)+b\times(10a+c)\\
&= 100a^2+10ac+10ab+bc\\
&= 100a\times(a+1)+bc\\
&= a\times(a+1)\times100+b\times c
\end{aligned}
$$

例 1　计算 28×57

分析　此题是普通的两位数乘两位数,是四年级学生必须掌握的基础知识,要求会列竖式解决这种基本的乘法计算。

$$
\begin{array}{r}
2\ 8\\
\times\ 5\ 7\\
\hline
1\ 9\ 6\\
1\ 4\ 0\\
\hline
1\ 5\ 9\ 6
\end{array}
$$

第二个因数十位上的5和28去乘,结果的末位要和5对齐。

例 2　(1) 计算 43×47

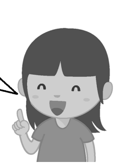
分析　该题是"同补"的类型,所以可以用巧算直接写出结果。

$$\underbrace{43\times47}_{}=\underbrace{20}_{4\times(4+1)}\ \overbrace{21}^{3\times7}$$

想一想,为什么是这样呢?

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (40+3)\times(40+7)\\
&= 40\times40+40\times7+3\times40+3\times7\\
&= 40\times(40+3+7)+3\times7\\
&= 40\times50+3\times7\\
&= 4\times10\times(4+1)\times10+3\times7
\end{aligned}
$$

同补口诀:
首数加1再乘首数,所得结果放在前。
尾数相乘放后面,不满两位前加零。



$=4\times(4+1)\times100+3\times7$

$=2021$

(2) 计算 34×36

分析 算式符合“同补”类型，即十位数字相同，个位数字相加得 10，所以乘积的结果为十位数加 1 乘十位数：$(3+1)\times3=12$；个位数字相乘：$4\times6=24$，结果就是 1224。

$$\overbrace{34\times36=12\ 24}^{4\times6}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{3\times(3+1)}$$

(3) 计算 51×59

分析 算式中乘积末尾的 9 是 1×9 得到的，但是要在 9 前面“补 0”，结果是 3009 而不是 309。这又是为什么呢？因为两个因数首位的 5 都是在十位上，表示的都是 5 个十，十与十的乘积应该是百，所以首位 $5\times(5+1)$ 得到的应该是 30 个百，后面的 9 前面不“补 0”的话，就变成了 309，其中 30 表示的是 30 个十，这样是不对的。

$$\overbrace{51\times59=30\ 09}^{1\times9}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{5\times(5+1)}$$

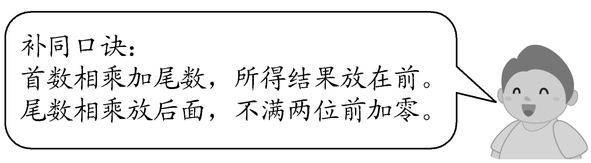
秘籍 2 补同的速算

补同，通常指的是两位数乘两位数，十位数字相加得十，个位数字相同，即 $\overline{ac}\times\overline{bc}$，并且 $a+b=10$，则 $\overline{ac}\times\overline{bc}=(a\times b+c)\times100+c\times c$。简单地说，乘积的末两位是由 $c\times c$ 得到的，如果是一位数前面补零变成两位数，乘积的前两位由 $a\times b+c$ 得到。

例 3 (1) 计算 34×74

分析 观察算式 34×74 符合十位互补，个位相同，也就是补同的速算，即 $3\times7+4=25$ 为结果的前两位，$4\times4=16$ 是结果的后两位。

$$\overbrace{34\times74=25\ 16}^{4\times4}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{3\times7+4}$$



(2) 计算 43×63

分析 算式符合十位互补规律，个位相同，也就是补同的速算，即 $4\times6+3=27$ 是结果的前两位，$3\times3=09$ 是结果的后两位。这里有一个“补 0”的情况要注意。个位乘个位得到一位数 9，因为个位相乘要占两位的，所以要在 9 的前面补“0”。

$$\overbrace{43\times63=27\ 09}^{3\times3}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{4\times6+3}$$

秘籍 3　两位数乘“99”的速算

$\overline{ab}$ 乘 99 的计算可以写成 $\overline{ab}\times(100-1)=\overline{ab}\times100-\overline{ab}$，即相当于结果的前两位比 ab 小 1，结果的后两位相当于 $100-ab$，这种计算方法可以起名为去一填补。归纳为两位数乘 99 的方法：结果的前两位比这个数小 1，结果的后两位与这两位数的和为 100。

例 4　(1) 计算 13×99　35×99　99×99

分析　观察算式都是两位数乘 99 的计算可以运用乘法分配律计算，直接得出结果。

原式 $=13\times(100-1)$
$=1300-13$
$=1287$

$$13\times99=\underbrace{1\quad2}_{13-1}\overbrace{8\quad7}^{100-13}$$

$35\times99=3465$

$99\times99=9801$

(2) 计算 113×999　556×999　4567×9999

分析　算式是三位数乘 999 和四位数乘 9999 的计算，是否也有类似上面的速算规律呢？我们可以运用乘法分配律计算，然后再对其结果进行观察。

原式 $=113\times(1000-1)$
$=113\times1000-113$
$=112887$

$113\times999=\underbrace{1\quad1\quad2}_{113-1}\overbrace{8\quad8\quad7}^{1000-113}$ 该题也有类似上面的速算规律。

$556\times999=555444$

$4567\times9999=45665433$

探究：是否几位数乘几个 9 都有类似的速算规律呢（同学们思考，答案见第 4 讲：从简单情况入手）？

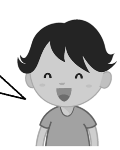
秘籍 4　重叠数的速算

例 5　(1) 计算 37×101　123×1001　1234×10001

分析　观察算式 $37\times101=3737$，$123\times1001=123123$，$1234\times10001=12341234$ 很容易发现运算结果的规律。为什么是这样的规律呢？

$\overline{abcabc}=\overline{abc}000+\overline{abc}$
$=\overline{abc}\times1000+\overline{abc}$
$=\overline{abc}\times(1000+1)$
$=\overline{abc}\times1001$

重叠数的分解：
$\overline{abab}=\overline{ab}\times101$
$\overline{abcabc}=\overline{abc}\times1001$
$\overline{abcdabcd}=\overline{abcd}\times10001$
$\overline{abcabcabc}=\overline{abc}\times1001001$



注意：$\overline{abc}$ 是三位数，与之相乘的 1001 是四位数。$\overline{abcd}$ 是四位数，与之相乘的 10001 是五位数，以此类推。

（2）计算 123×101

分析 这种重叠数已经不再符合第一种基本情况了，在运算中出现了数字叠加是 4 的情况。个位的 1 和 123 相乘后是 123，占了三位，百位上的 1 和 123 相乘后，正好重叠，相加后形成乘积的百位数字，即 $1+3=4$，所以结果应该为 12423。

（3）计算 1234×1001

分析 观察发现该算式不符合重叠数速算的基本规律，1234 是四位数，而与之相乘的 1001 也是四位数，所以也出现了数字叠加情况。对于叠加的情况，只需要把叠加位的数字相加即可。

$$\begin{array}{r} 1234 \\ +\quad 1234 \\ \hline 1235234 \end{array}$$

原式 $=1235234$

（4）计算 123×1002

分析 运算结果的后三位数分别是前三位数的 2 倍。

原式 $=123246$

例 6 （1）计算 $203 \times 202202 - 202 \times 203203$

分析 观察算式发现 202202 是重叠数，$202202 = 202000 + 202 = 202 \times 1000 + 202 = 202 \times 1001$，同理 $203203 = 203 \times 1001$，这样两个算式中公因数为 1001。计算可以比较简便。

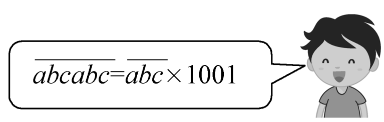
原式 $=203 \times 202 \times 1001 - 202 \times 203 \times 1001$

$=202 \times 203 \times 1001 - 202 \times 203 \times 1001$

$=0$

（2）计算 $(34 \times 3535 - 35 \times 3434) \div 38$

分析 观察算式发现 3535、3434 是重叠数，可以分解为 $3535 = 35 \times 101$，$3434 = 34 \times 101$。



原式 $=(34 \times 35 \times 101 - 35 \times 34 \times 101) \div 38$

$=0 \div 38$

$=0$

秘籍总结

1. 同补速算（头同尾合十）。
2. 补同速算。
3. 两位数乘 99 的速算，去一填补。
4. 重叠数速算：① $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1001$　$\overline{abcdabcd} = \overline{abcd} \times 10001$

   ② $\overline{abcabcabc} = \overline{abc} \times 1001001$。

秘籍修炼 1

练 1　计算(1)75×33　　67×67　　84×34　　56×89

(2)62×68　　75×75　　81×89　　73×77

练 2　计算26×86　　65×45　　52×52　　37×77

练 3　计算77×99　　99×52　　888×999　　1143×9999

练 4　计算852×1001　　2014×10001　　213×101　　1001×1001

练 5　计算 $1234\times56785678-12341234\times5678$

练 6　计算 $3721\times135713571357-372137213721\times1357$

第2讲　等差数列进阶

秘籍导航

理解等差数列求和公式的巧算方法，牢记相关的通项公式、项数公式等，能综合运用公式解决等差数列问题。

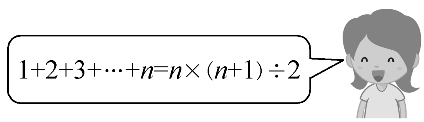
秘籍攻略

秘籍 1　一般的公式套用

例 1　(1) 计算 $1+2+3+\cdots+56$

分析　观察算式发现是最简单的等差数列，所以可以直接套用公式求解。等差数列求和公式：和 = (首项 + 末项) × 项数 ÷ 2。

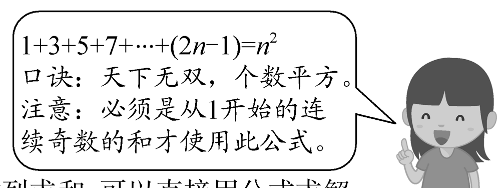
原式 $=(1+56)\times56\div2$
$=57\times28$
$=1596$



(2) 计算 $1+3+5+\cdots+101$

分析　观察算式发现是奇数列求和，可以先求出项数，再用等差数列求和，或者直接用奇数列特殊求和公式。项数 = (末项 − 首项) ÷ 公差 + 1。

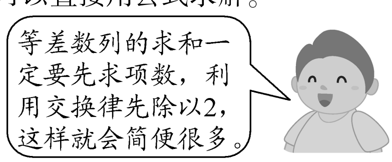
项数 $=(101-1)\div2+1$　　和 $=51^2$
$=100\div2+1$　　$=2601$
$=51$



(3) 计算 $2+4+6+\cdots+210$

分析　观察算式发现这个数列是偶数数列求和，可以直接用公式求解。

项数 $=(210-2)\div2+1$　　和 $=(1+105)\times105$
$=105$　　$=11130$



(4) 计算 $4+7+10+\cdots+292+295+298$

分析　观察算式发现这个数列是等差数列，直接套用公式就可以求解。

项数 $=(298-4)\div3+1$　　和 $=(4+298)\times99\div2$
$=294\div3+1$　　$=302\div2\times99$
$=99$　　$=14949$

秘籍 2　等差数列混合运算中的分组思想

例 2　(1) 计算 $2000-3-6-9-\cdots-51-54$

分析 观察算式发现是 2000 连减公差相等的一些数，先利用添括号法则，等于 2000 减去后面数的和，后面的数列是等差数列。

原式 $=2000-(3+6+9+\cdots+51+54)$

$=2000-(3+54)\times[(54-3)\div3+1]\div2$

$=2000-57\times9$

$=1487$

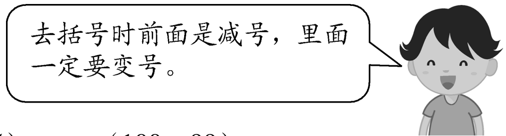
(2) 计算$(2+4+6+\cdots+96+98+100)-(1+3+5+\cdots+95+97+99)$

分析 观察算式发现第一个括号内是偶数列求和，第二个括号内是奇数列求和，可以分别算出两个和再相减，或者先去括号奇偶数两两相减留下 50 个 1 相加。

方法 1　原式 $=(1+50)\times50-50^2$

$=51\times50-2500$

$=50$



方法 2　原式 $=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(100-99)$

$=1+1+1+\cdots+1$

$=50$

例 3 (1) 计算 $2015-2012+2009-2006+\cdots+11-8+5-2$

分析 观察算式发现 $2015-2012=3$，$2009-2006=3$，…，$11-8=3$，$5-2=3$，可以先运用加法结合律，再求出项数就可以知道多少个 3 相加。

项数 $=(2015-2)\div3+1$

$=2013\div3+1$

$=672$

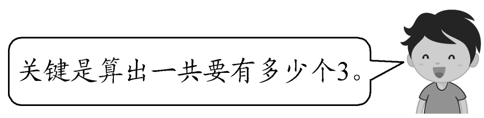
和 $=(2015-2012)+(2009-2006)+\cdots+(11-8)+(5-2)$

$=3+3+3+\cdots+3$

$=3\times(672\div2)$

$=3\times336$

$=1008$



(2) 计算 $1+2+3-4+5+6+7-8+9+10+11-12+\cdots+25+26+27-28$

分析 观察算式发现算式是按照三个加一个减的规律呈现的，$1+2+3-4=2$，$5+6+7-8=10$，$9+10+11-12=18$，…，$25+26+27-28=50$，并且每组三加一减的结果构成了等差数列。

原式 $=(1+2+3-4)+(5+6+7-8)+(9+10+11-12)+\cdots+(25+26+27-28)$

$=2+10+18+\cdots+50$

$=(2+50)\times[(50-2)\div8+1]\div2$

$=52\times7\div2$

$=26\times7$

$=182$

例 4 计算 $51+53+55+\cdots+121$

分析 观察发现这个算式可以直接用等差数列求和，也可以用借来还去的方法计算。

方法 1　原式 $=51+53+55+57+\cdots+121$

$=(51+121)\times[(121-51)\div2+1]\div2$

$=172\times36\div2$

$=3096$

方法 2　原式 $=(1+3+5+\cdots+121)-(1+3+5+\cdots+49)$

$=[(121-1)\div2+1]^2-[(49-1)\div2+1]^2$

$=61^2-25^2$

$=3721-625$

$=3096$

秘籍 3　等差数列求第 n 项

例 5　(1) 一个数列是 1,3,6,10,…,求第 100 项。

分析　观察题目发现第 1 项是 1,第 2 项是 $1+2=3$,第 3 项是 $1+2+3=6$,第 4 项是 $1+2+3+4=10$,……。由此可见,它是由从 1 起的连续自然数的和组成的数列,因而,第 100 项就是 $1+2+3+\cdots+100=5050$。

(2) 一个数列是 1,4,9,16,…,求第 10 项。

分析　方法 1　观察题目第 1 项是 1,第 2 项是 $1+3=4$,第 3 项是 $1+3+5=9$,第 4 项是 $1+3+5+7=16$,……。由此可见,这是奇数列求和,则第 10 项是 $1+3+5+\cdots+19=100$。

方法 2　观察题目发现第 1 项是 $1\times1=1$,第 2 项是 $2\times2=4$,第 3 项是 $3\times3=9$,第 4 项是 $4\times4=16$,……。由此可见,第 10 项是 $10\times10=100$。

秘籍 4　等差数列的运用

例 6　1～200 内(包括 200)能被 7 整除或能被 9 整除的所有数的和是多少?

分析　观察题目发现,能被 7 整除的数恰好是等差数列,能被 9 整除的数也是等差数列,但是它们的和有重复,需减去。

1～200 内能被 7 整除的数是 7,14,21,28,…,196,它们的和是

$7+14+21+\cdots+196$

$=(7+196)\times[(196-7)\div7+1]\div2$

$=203\times28\div2$

$=2842$

1～200 内能被 9 整除的数是 9,18,27,36,…,198,它们的和是

$9+18+27+\cdots+198$

$=(9+198)\times[(198-9)\div9+1]\div2$

$=207\times22\div2$

$=2277$

能同时被 7 和 9 整除的数有 63,126,189,它们的和是

$\quad 63+126+189$

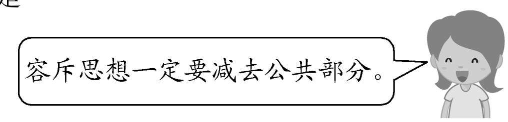
$=378$

1 ~200 内能被 7 或 9 整除的所有数的和是

$\quad 2842+2277-378$

$=5119-378$

$=4741$



秘籍总结

1. 等差数列的基本公式

(1)求和 = (首项 + 末项) × 项数 ÷2

$S_n=(a_1+a_n)\times n\div 2$

(2)项数 = (末项 − 首项) ÷ 公差 +1

$n=(a_n-a_1)\div d+1$

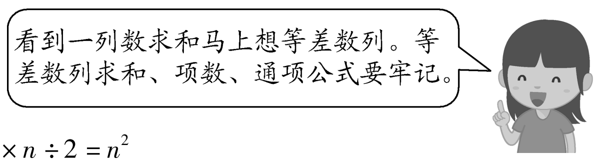
(3)通项公式 = 首项 + (项数 −1) × 公差

$a_n=a_1+(n-1)\times d$

2. 特殊数列的求和公式

(1)自然数求和

$1+2+3+\cdots+n=(1+n)\times n\div 2$



(2)奇数列求和

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=(1+2n-1)\times n\div 2=n^2$

(3)偶数列求和

$2+4+6+\cdots+2n=(2+2n)\times n\div 2=(1+n)\times n$

秘籍修炼2

练 1 计算(1)$1+2+3+\cdots+78$　　(2)$1+3+5+\cdots+201$

(3)$2+4+6+\cdots+200$　　(4)$2+6+10+\cdots+202+206+210$

练 2 计算(1)$4000-1-2-3-\cdots-77-78$

(2)$(2+4+6+\cdots+106+108+110)-(1+3+5+\cdots+105+107+109)$

练 3 计算(1)$204-198+192-186+\cdots+24-18+12-6$

(2)$560-557+554-551+\cdots+500-497$

练 4 (1)求 200 以内所有奇数的和。

(2)计算 $3\times(1+2+3+\cdots+8+9+10)-(11+12+13+\cdots+18+19+20)$

练 5 (1)一个影剧院共有30排座位,第一排有20个座位,以后每排要比前一排多2个座位。请问这个电影院最后一排有多少个座位?

(2)一个影剧院共有座位若干排,第一排有15个座位,以后每排要比前排多2个座位,最后一排有73个座位。请问这个电影院共有多少个座位?

练 6 (1)1 ~100(包含100)能被3整除或被5整除的数的和是多少?

(2)一个数列是2,6,12,20,…,求第10项。

第3讲　提取公因数

秘籍导航

理解提取公因数与乘法分配律的关系,体会提取公因数可以达到少算乘法的作用,熟练运用提取公因数简便计算。

秘籍攻略

秘籍 1　直接提取公因数

提取公因数实际上是乘法分配律的逆运用。

例 1　计算 25×401

分析　使用乘法分配律进行计算。

原式 $=25\times(400+1)$

$=25\times400+25\times1$

$=10000+25$

$=10025$

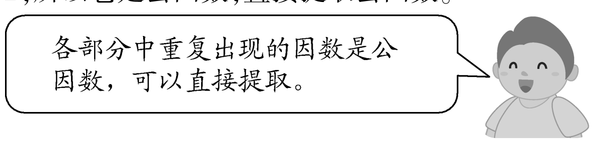
例 2　(1) 计算 $32\times56+44\times32$

分析　题目中重复出现的数是 32,所以它是公因数,直接提取公因数。

原式 $=32\times(56+44)$

$=32\times100$

$=3200$



(2) 计算 $15\times43+57\times15$

分析　加号连接的两部分乘法式子中重复出现的数是 15,所以它是公因数,直接提取公因数。

原式 $=15\times(43+57)$

$=15\times100$

$=1500$

(3) 计算 $61\times27+52\times61+61\times21$

分析　加号连接的三部分乘法式子中重复出现的数是 61,所以它是公因数,直接提取公因数。

原式 $=61\times(27+52+21)$

$=61\times100$

$=6100$

(4) 计算 $159\times37-37\times59$

分析 减号连接的两部分乘法式子中重复出现的数是 37，所以它是公因数，直接提取公因数。

原式 $=37\times(159-59)$

$=37\times100$

$=3700$

秘籍 2 变化后提取公因数

例 3 (1) 计算 $48\times17+16\times49$

分析 48 是 16 的 3 倍，所以通过变形找到相同的数，进行公因数提取。

原式 $=16\times3\times17+16\times49$

$=16\times51+16\times49$

$=16\times(51+49)$

$=16\times100$

$=1600$

(2) 计算 $11\times108+18\times33$

分析 108 是 18 的倍数，通过变形把 108 变成 18×6。

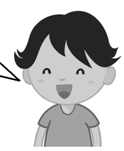
原式 $=11\times6\times18+18\times33$

$=66\times18+18\times33$

$=(66+33)\times18$

$=99\times18$

$=1782$



(3) 计算 $63\times145-115\times29$

分析 145 是 29 的倍数，通过变形把 29 变成 145。

原式 $=63\times145-23\times5\times29$

$=63\times145-23\times145$

$=(63-23)\times145$

$=40\times145$

$=5800$

例 4 计算 $80\times37+47\times63$

分析 题目中没有公因数，但是有“补数”37 和 63，可以去凑公因数。

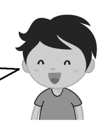
原式 $=(47+33)\times37+47\times63$

$=47\times37+33\times37+47\times63$

$=47\times(37+63)+33\times37$

$=4700+1221$

$=5921$



秘籍3　二次提取公因数

例5 （1）计算 $14\times6+4\times26+6\times12$

分析 算式中无公因数，但有局部的公因数6。

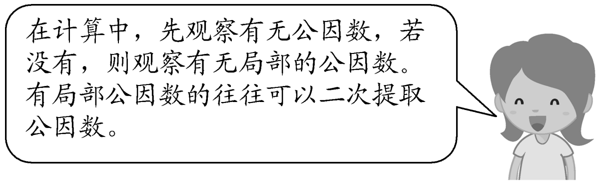
原式 $=(14+12)\times6+4\times26$

$=26\times6+4\times26$

$=(6+4)\times26$

$=10\times26$

$=260$



（2）计算 $70\times12+6\times150+12\times80$

分析 算式中无公因数，但有局部的公因数12。

原式 $=(70+80)\times12+6\times150$

$=150\times12+6\times150$

$=(12+6)\times150$

$=18\times150$

$=2700$

例6 计算 $667\times668\times669-666\times668\times670$

分析 先提取公因数，然后使用平方差公式逆运算。

原式 $=668\times(667\times669-666\times670)$

$=668\times[(668^2-1^2)-(668^2-2^2)]$

$=668\times(4-1)$

$=2004$

秘籍总结

相同的数，直接提取公因数。

成倍的数，变化提取公因数。

局部相同，二次提取公因数。

秘籍修炼3

练1 计算 $365\times23+365\times77$

练2 计算 $63\times101-63$

练3 计算 $630\times257+2570\times37$

练4 计算 $361\times68+486\times32$

练5 计算（1）$17\times47+47\times19+19\times36+36\times34$

（2）$7816\times145+314\times2184+169\times7816$

练6 计算 $343\times345\times347-342\times345\times348$

第4讲　从简单情况入手

秘籍导航

在做大数的计算题时学会运用简单的数来推导,然后得出规律以解决问题,达到巧算的目的。

秘籍攻略

秘籍 1　神奇有趣的方法

例 1　(1) 计算 111111111×111111111

分析　两个九位数相乘,列竖式非常麻烦,我们可以观察下面算式的特点,然后再归纳,这样计算比较简便。

$1\times1=1$

$11\times11=121$

$111\times111=12321$

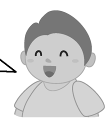
$1111\times1111=1234321$

$11111\times11111=123454321$

…

$111111111\times111111111=12345678987654321$

$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个“1”}}\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个“1”}}=\overline{123\cdots n\cdots321}$　($n\leqslant9$)



(2) 计算 $1+2+3+\cdots+98+99+100+99+98+\cdots+3+2+1$

分析　算式中 100 的左边是自然数等差数列,100 的右边也是自然数等差数列,我们可以把这样的数列起名为金字塔数列,可使用等差数列公式计算。我们可以从简单入手再来观察该题。

$1+2+1=2\times2=4$

$1+2+3+2+1=3\times3=9$

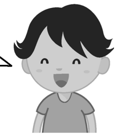
$1+2+3+4+3+2+1=4\times4=16$

$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5\times5=25$

…

$1+2+3+\cdots+98+99+100+99+98+\cdots+3+2+1=100\times100=10000$

$1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1=n^2$
(通常把这样的数列叫作塔数)。



例 2　(1) 计算 1111111111 ×9999999999

分析　算式中是连续的 10 个 1 乘连续的 10 个 9，数很大如果列竖式很麻烦，可以从简单入手找一些规律。

1 ×9 =9

11 ×99 =1089

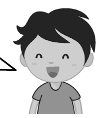
111 ×999 =110889

1111 ×9999 =11108889

…

1111111111 ×999999999 =11111111108888888889

$\underbrace{111\cdots111}_{n个“1”}\times\underbrace{999\cdots999}_{n个“9”}=\underbrace{111\cdots1}_{n-1个“1”}0\underbrace{888\cdots8}_{n-1个“8”}9$



(2) 计算 333333333 ×333333334

分析　算式中乘号左右是相邻的两个自然数，且是重叠数。数很大如果列竖式很麻烦，可以从简单入手找一些规律。

3 ×4 =12

33 ×34 =1122

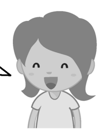
333 ×334 =111222

3333 ×3334 =11112222

…

333333333 ×333333334 =111111111222222222

$\underbrace{333\cdots33}_{n个“3”}\times\underbrace{3\cdots33}_{n-1个“3”}4=\underbrace{111\cdots1}_{n个“1”}\underbrace{222\cdots2}_{n个“2”}$



秘籍 2　从简单归纳

例 3　(1) 37 ×(　　) =666

37 ×(　　) =888

分析　算式中一个因数是 37，而积是重叠数。所以我们可以分析下面的算式。

37 ×3 =111

37 ×3 ×2 =222

37 ×3 ×3 =333

37 ×3 ×4 =444

37 ×3 ×5 =555

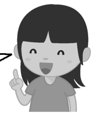
37 ×3 ×6 =666

37 ×3 ×7 =777

37 ×3 ×8 =888

所以 37 ×18 =666，37 ×24 =888。

$37\times3n=\overline{nnn}$（$n$是1~9的自然数）



（2） $8547\times(\quad)=888888$

$8547\times(\quad)=999999$

分析 算式中一个因数是8547，积是重叠数。该题是有特点的，我们从下面的式子来分析。

$8547\times13=111111$

$8547\times13\times2=222222$

$8547\times13\times3=333333$

$8547\times13\times4=444444$

不难发现8547乘1乘13是111111，乘2乘13是222222，乘3乘13是333333，……，乘8乘13是888888，乘9乘13是999999，乘n乘13就是$\overline{nnnnnn}$(n是1~9的自然数)。

原式 $=8547\times(13\times8)$

$=8547\times104$

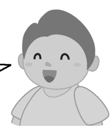
$=888888$

原式 $=8547\times(13\times9)$

$=8547\times117$

$=999999$

$8547\times13n=\overline{nnnnnn}$（$n$是1~9的自然数）



（3） $12345679\times(\quad)=999999999$

分析 算式中一个因数是12345679，积是重叠数。该题是有特点的，我们从下面的式子来分析。

$12345679\times9=111111111$

$12345679\times9\times2=222222222$

$12345679\times9\times3=333333333$

$12345679\times9\times4=444444444$

…

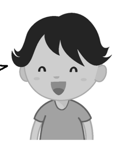
原式 $=12345679\times9\times9$

$=12345679\times81$

$=999999999$

所以，括号内填81。

$12345679\times9n=\overline{nnnnnnnnn}$（$n$是1~9的自然数）



秘籍3 位数递增的叠数相加

例4 (1) 计算 $1+11+111+1111+\cdots+\underbrace{11\cdots1}_{9个“1”}$

分析 算式由九个数相加且九个数都是由位数递增的 1 组成。数很多如果列竖式很麻烦,可以从简单入手找一些规律。

$1+11=12$

$1+11+111=123$

$1+11+111+1111=1234$

$1+11+111+1111+11111=12345$

…

$1+11+111+1111+\cdots+\underbrace{11\cdots1}_{9个“1”}=123456789$

(2) 计算 $3+33+333+3333+\cdots+\underbrace{33\cdots3}_{9个“3”}$

分析 算式是由九个数相加且九个数都是由位数递增的 3 组成。数很多如果列竖式很麻烦,我们可以把 3 提出来,该题变成上面的例题,再用结果乘 3 就可以了。

原式 $=3\times(1+11+111+1111+\cdots+\underbrace{11\cdots1}_{9个“1”})$

$=3\times123456789$

$=370370367$

秘籍4 几位数乘几个“9”的方法

例5 (1) 计算 99999×99999

分析 可以列竖式,也可以用乘法分配律计算,但是这类题型有自己独特的规律。我们先从简单入手,这样计算比较简便。

$99\times99=9801$

$999\times999=998001$

$9999\times9999=99980001$

$99999\times99999=9999800001$

…

$\underbrace{99\cdots9}_{n个“9”}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个“9”}=\underbrace{99\cdots9}_{n-1个“9”}8\underbrace{00\cdots0}_{n-1个“0”}1$

(2) 计算 $999999999\times999999999+1999999999$

分析 算式是由九个 9 乘九个 9 加了一个数,由上面几个 9 乘几个 9 的特点,我们就可以直接算出该题,最后相加就可以了。此题还可以用乘法分配律计算。

方法 1 原式 $=999999998000000001+1999999999$

$=1000000000000000000$

方法 2　原式 $=999999999\times999999999+999999999+1000000000$

$=999999999\times(999999999+1)+1000000000$

$=999999999\times1000000000+1000000000$

$=999999999000000000+1000000000$

$=1000000000000000000$

（3）计算 56789×99999

分析 一个五位数乘五个 9，我们可以先从两位数乘两个 9 入手，然后观察三位数乘三个 9 的特点，来归纳几位数乘几个 9 的方法。

$56\times99=5544$

$567\times999=566433$

$5678\times9999=56774322$

$56789\times99999=5678843211$

我们不难发现，两位数乘两位数结果是四位数，三位数乘三位数结果是六位数，……，且第一个算式结果的前两位比 56 小 1，后两位与 56 的和是 100，第二个算式的结果的前三位同样比 567 小 1，后三位与 567 的和是 1000，……。这个方法被归纳为“去一填补”。

秘籍 5　从简单入手的综合运用

例 6 现有 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克的糖果各一包，如果整包出售，可以卖的克数有多少种？

分析 观察上面的数 1，2，4，8，16，我们可以一一尝试。但是如果数很多，计算就非常麻烦，不妨先从简单推导，看是否存在规律。

如果只有 1 克、2 克，可以卖出 1 克、2 克、3 克。

如果只有 1 克、2 克、4 克，可以卖出 1 克、2 克、3 克、4 克、5 克、6 克、7 克。

如果只有 1 克、2 克、4 克、8 克，可以卖出 1 克、2 克、3 克、4 克、5 克、6 克、7 克、8 克、9 克、10 克、11 克、12 克、13 克、14 克、15 克。

不难发现 $1+2=3=2^2-1$，

$1+2+4=7=2^3-1$，

$1+2+4+8=15=2^4-1$，

那么上题的答案是 $1+2+4+8+16=31=2^5-1$，也就是说能卖出的克数是 1 克至 31 克。如果有 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克、…、2^{n-1} 克，可以卖出 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 种。

秘籍总结

看到大数计算时，
勿急于列竖式，
先观察，再分析，
找简单数进行推导，
最后得规律，求结果。

秘籍修炼 4

练 1 计算(1)111111×111111

(2)11111111×11111111

(3)$1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + \cdots + 3 + 2 + 1$

(4)$1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30 + 29 + 28 + \cdots + 3 + 2 + 1$

(5)111111×999999

(6)11111111×99999999

练 2 计算(1)3333×3334

(2)666666×666667

练 3 计算(1)$37 \times (\quad) = 777$

(2)$37 \times (\quad) = 999$

(3)$8547 \times (\quad) = 333333$

(4)$12345679 \times (\quad) = 555555555$

练 4 计算$1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + 111111 + 1111111$

练 5 计算(1)6666×3333　　(2)33333×33333

(3)999999×999999　　(4)678×999

(5)6789×9999　　(6)13432×99999

练 6 现有 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克、32 克的糖果各一包,如果整包出售,可以卖的克数有多少种?

第5讲　四则混合运算

秘籍导航

在做既有加减法，又有乘除法的运算题时，要灵活地运用定律，达到巧算的目的。

秘籍攻略

秘籍 1　乘法计算中的速算技巧

例 1　(1) 计算 $4\times23\times25$

分析　观察算式发现，$4\times25=100$，所以可以运用乘法交换律先把 4 与 25 相乘，再乘 23。

原式 $=4\times25\times23$

$=100\times23$

$=2300$

(2) 计算 96×125

分析　观察算式发现，$125\times8=1000$，$12\times8=96$，我们先把 96 拆开然后运用乘法结合律计算。

原式 $=12\times8\times125$

$=12\times(8\times125)$

$=12\times1000$

$=12000$

(3) 计算 $25\times32\times125$

分析　观察算式发现，$32=4\times8$，$25\times4=100$，$125\times8=1000$，可以运用乘法交换律计算。

原式 $=25\times4\times8\times125$

$=100\times1000$

$=100000$

(4) 计算 $75000\div125\div15$

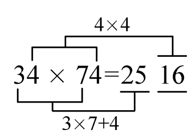
分析　观察算式发现，$75000=75\times1000$，$1000\div125=8$，$75\div15=5$，可以灵活运用交换律计算。

原式 $=75\times1000\div125\div15$

$=(75\div15)\times(1000\div125)$

$=5\times8$

$=40$



例 2 (1) 计算 $2800 \div 25 \div 8$

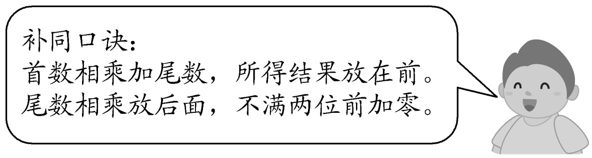
分析 观察算式发现，$25 \times 8 = 200$，然后再用 $2800 \div 200 = 14$，这样运用添括号的方法计算从而达到简便运算的目的。

原式 $= 2800 \div (25 \times 8)$
$= 2800 \div 200$
$= 14$

(2) 计算 $7272720 \times 36 \div 72$

分析 观察算式发现，$7272720 \div 72 = 101010$，这样我们可以交换 36 和 72 的位置进行简便计算，但要注意交换位置的时候，要带着前面的符号。

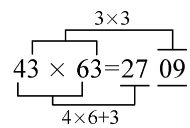
原式 $= 7272720 \div 72 \times 36$
$= 101010 \times 36$
$= 3636360$



(3) 计算 $432 \times 52 \div 26$

分析 观察算式发现，$52 \div 26 = 2$，我们可以运用添括号的方法达到简便计算的目的。

原式 $= 432 \times (52 \div 26)$
$= 432 \times 2$
$= 864$



(4) 计算 $525 \div (25 \times 7)$

分析 观察算式发现，$525 \div 25 = 21$，我们可以先把括号去掉运用乘法结合律计算。

原式 $= 525 \div 25 \div 7$
$= 21 \div 7$
$= 3$

(5) 计算 $550000 \div 121 \times 11$

分析 观察算式发现，$121 \div 11 = 11$，我们可以运用添括号的方法达到简便计算的目的。

原式 $= 550000 \div (121 \div 11)$
$= 550000 \div 11$
$= 50000$

(6) 计算 $(91 \times 48 \times 75) \div (25 \times 13 \times 16)$

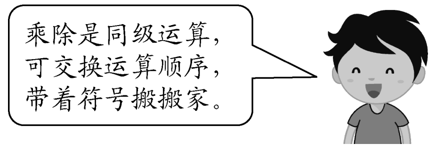
分析 观察算式发现，$91 \div 13 = 7$，$48 \div 16 = 3$，$75 \div 25 = 3$，我们可以运用去括号，再添括号的方法进行计算。

原式 $= 91 \times 48 \times 75 \div 25 \div 13 \div 16$

$= (91 \div 13) \times (48 \div 16) \times (75 \div 25)$

$= 7 \times 3 \times 3$

$= 63$



秘籍 2　加、减、乘、除运算中的计算技巧

例 3　(1) 计算 $6 \times 237 + 351 \div 13 - 35$

分析　观察算式发现，含有两级运算，要先做二级运算 6×237 和 $351 \div 13$，再计算积与商的和，最后做减法。

原式 $= 1422 + 27 - 35$

$= 1449 - 35$

$= 1414$

(2) 计算 $1500 \div 25 \div 4 + 125 \times 56 - 15$

分析　观察算式发现，$25 \times 4 = 100$，$125 \times 8 = 1000$，我们可以运用添括号的方法计算，这样比较简便。

原式 $= 1500 \div (25 \times 4) + 125 \times 8 \times 7 - 15$

$= 1500 \div 100 + 1000 \times 7 - 15$

$= 15 + 7000 - 15$

$= 7000$

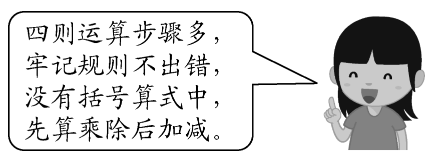
(3) 计算 $71812 - 3534 \div 114 \times 99$

分析　观察发现，算式含有两级运算，要先做 $3534 \div 114$，再计算商与 99 的乘积，最后做减法。

原式 $= 71812 - 31 \times 99$

$= 71812 - 3069$

$= 68743$



秘籍 3　除法性质的运用技巧

例 4　(1) 计算 $(72 + 64) \div 8$

分析　该算式可以直接计算，也可以运用除法的性质计算。

原式 $= 72 \div 8 + 64 \div 8$

$= 9 + 8$

$= 17$

(2) 计算 $185 \div 13 - 39 \div 13 - 16 \div 13$

分析　算式中减号连接的三个除法式子中都有除数 13，运用除法的性质计算。

原式 $= (185 - 39 - 16) \div 13$

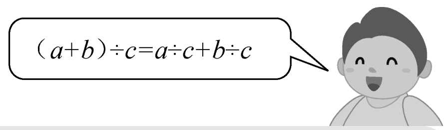
$= 130 \div 13$

$= 10$

(3) 计算 $215 \div 29 + 759 \div 29 + 476 \div 29$

分析　求 $215\div29$，$759\div29$，$476\div29$ 的和，实际可以写成 215，759，476 的和除以 29 的商。即除法的性质的运用。

原式 $=(215+759+476)\div29$
$=1450\div29$
$=50$



秘籍 4　多重括号的运算技巧

例 5　(1) 计算 $96\div[18-(82-110\div5)\div6]+18$

分析　既有小括号又有中括号，先算小括号，再算中括号，然后算括号外面的；既有乘除又有加减先算乘除后算加减。

原式 $=96\div[18-(82-22)\div6]+18$
$=96\div[18-60\div6]+18$
$=96\div[18-10]+18$
$=96\div8+18$
$=12+18$
$=30$

(2) 计算 $519\div[35-(63\div7+25)]\div173+898$

原式 $=519\div[35-(9+25)]\div173+898$
$=519\div[35-34]\div173+898$
$=519\div1\div173+898$
$=519\div173+898$
$=3+898$
$=901$

(3) 计算 $(425\times5776-425+4225\times425)\div125\div8$

原式 $=425\times(5776-1+4225)\div(125\times8)$
$=425\times10000\div1000$
$=4250000\div1000$
$=4250$

例 6　计算 $(84-81+78-75+72-69+\cdots+12-9+6-3)\div3$

分析　84，81，78，…，12，9，6，3 是等差数列，且 $84-81=3$，$78-75=3$，…，$12-9=3$，$6-3=3$，然后就看一共有几个 3，相加就可以。

原式 $=[(84-81)+(78-75)+(72-69)+\cdots+(12-9)+(6-3)]\div3$
$=(3+3+3+\cdots+3)\div3$
$=14\times3\div3$
$=14$

括号中 3 的数量，可以通过 84，81，78，…，6，3 这个等差数列来求，即 $(84-3)\div3+1=28$，又因为 2 个一组，所以一共有 14 个 3 。

秘籍总结

加减乘除四则运算，

从左至右先乘除后加减，
有括号先小再中后大，
活用运算定律，调整顺序简算。

秘籍修炼5

练1 计算（1）$2500 \div 25 \div 4$　（2）$510 \div 15 \div 17$

（3）$630 \div (9 \times 5)$　（4）$756 \div (196 \div 7)$

练2 计算（1）$871 \times 364 \div 182$　（2）$125 \times 91 \div 25$

（3）$650000 \div 169 \times 13$　（4）$204 \times 312 \div 197 \div 312 \times 197 \div 204$

练3 计算（1）$37 + 49 + 700 \div 25 \div 4$

（2）$200 \div 7 + 312 \div 7 + 188 \div 7$

（3）$3895 \div 41 - 1058 \div 41 - 828 \div 41$

（4）$(2280 \div 13 - 648 \div 13 + 448 \div 13) \div 16$

练4 计算（1）$2730 \times 71 + 273 \times 310 - 5460$

（2）$(475 \times 410 + 5250 \times 41) \div 100$

练5 计算（1）$144 \div [(270 - 450 \div 15) \div 10 \times 6]$

（2）$(3971 \times 215 + 215 + 2028 \times 215) \div 625 \div 8$

（3）$8 \times [138 - (284 - 161)] \div 12$

（4）$108 \div 18 \times 55 + 6 \times 45$

练6 计算（1）$(3 + 33 + 333 + 3333 + 33333) \div 5$

（2）$(100 - 99 + 98 - 97 + 96 - 95 + \cdots + 4 - 3 + 2 - 1) \div 5$

第6讲　公式类计算

秘籍导航

在做有规律的计算题时学会运用公式达到巧算的目的。

秘籍攻略

秘籍 1　连续的自然数求和公式

$1+2+3+\cdots+n=(1+n)\times n\div 2$

推导： $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$　①

$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$　②

①＋②得 $1+n=2+(n-1)=3+(n-2)=\cdots=n(1+n)$，共有 n 个 $(1+n)$，由于上下加了两遍，所以除以 2 即可，所以 $1+2+3+\cdots+n=(1+n)\times n\div 2$。

或直接用等差数列公式，首项加末项的和乘以项数除以 2。

例 1　（1）计算①$1+2+3+\cdots+10$　②$1+2+3+\cdots 100$　③$1+2+3+\cdots+1000$

分析　符合自然数求和公式可以直接套用。

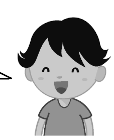
①原式 $=(1+10)\times 10\div 2$
$=11\times 10\div 2$
$=55$

②原式 $=(1+100)\times 100\div 2$
$=101\times 50$
$=5050$

③原式 $=(1+1000)\times 1000\div 2$
$=500500$

（2）计算 $1+2+3+\cdots+89$

分析　原式 $=(1+89)\times 89\div 2$
$=90\times 89\div 2$
$=45\times 89$
$=4005$



（3）计算 $3+6+9+\cdots+300$

分析　该题是等差数列，可以运用等差数列的公式计算，仔细观察 3，6，9，⋯，300 都有公因数 3，可以提取 3 然后变成 $1+2+3+\cdots+100$，直接用自然数列求和即可。

原式 $=3\times(1+2+3+\cdots+100)$
$=3\times 5050$
$=15150$

（4）计算 $13+14+15+\cdots+30$

分析　该题是等差数列，可以直接运用等差数列求和公式计算，也可以用借来还去的方法，再用自然数列求和公式。

原式 $=(1+2+3+\cdots+30)-(1+2+3+\cdots+12)$
$=(1+30)\times30\div2-(1+12)\times12\div2$
$=31\times15-13\times6$
$=465-78$
$=387$

(5) 有一个钟一点敲一下,两点敲两下,三点敲三下,……,十二点敲十二下,每半点敲一下,求一昼夜一共敲了多少下(十三点敲一下,十四点敲二下,……,二十四点敲十二下)?

分析 一点敲一下,两点敲两下,三点敲三下,……,十二点敲十二下,一昼夜是一个白天与一个黑夜,所以是

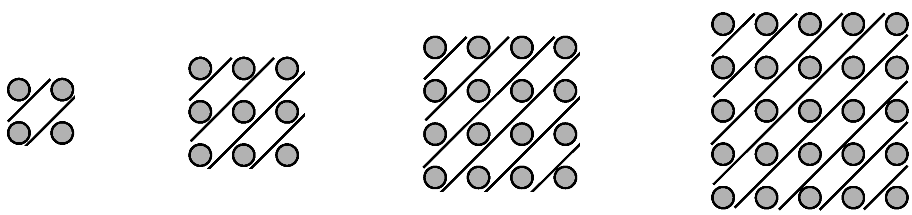
$(1+2+3+\cdots+12)\times2+12\times2$
$=(1+12)\times12\div2\times2+24$
$=13\times12\div2\times2+24$
$=180$(下)

秘籍 2 山顶和公式的巧用

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$

推导 1 前半段 $1+2+3+\cdots+(n-1)+n$ 直接用自然数求和公式 $1+2+3+\cdots+n=(1+n)\times n\div2$,同理后半段 $(n-1)+\cdots+3+2+1=(n-1)\times n\div2$。前后两段相加得 $1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$。

推导 2 数形结合图。



$1+2+1=2\times2=4$
$1+2+3+2+1=3\times3=9$
$1+2+3+4+3+2+1=4\times4=16$
$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5\times5=25$
…
$1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1=n\times n=n^2$

例 2 (1) 计算 $1+2+3+4+5+\cdots+11+\cdots+5+4+3+2+1$

分析 观察算式发现可以用山顶和公式。

原式 $=11\times11=121$

(2) 计算 $1+2+3+\cdots+100+\cdots+3+2+1$

原式 $=100\times100=10000$

(3) 计算 $2+4+6+8+\cdots+100+\cdots+8+6+4+2$

分析 这个算式不符合山顶和公式，但是能不能变成山顶和公式呢？可以提取公因数2，变成 $2\times(1+2+3+\cdots+50+\cdots+3+2+1)$ 再计算。

原式 $=2\times(1+2+3+\cdots+50+\cdots+3+2+1)$

$=2\times 50\times50$

$=5000$

(4) 计算 $51+52+53+\cdots+100+\cdots+53+52+51$

分析 这个算式不能直接用山顶和公式，但是可以用借来还去的方法变成山顶和公式。

原式 $=(1+2+3+\cdots+100+\cdots+3+2+1)-(1+2+3+\cdots+50+\cdots+3+2+1)-50$

$=100^2-50^2-50$

$=10000-2500-50$

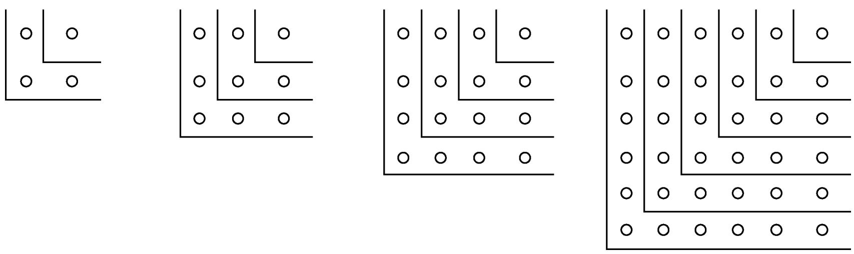
$=7450$

秘籍3　“天下无双，个数平方”

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

推导1　可以直接用等差数列公式 $(1+2n-1)\times n\div2=n^2$。

推导2　数形结合图。



$1+3=2\times2=4$

$1+3+5=3\times3=9$

$1+3+5+7=4\times4=16$

$1+3+5+7+9=5\times5=25$

…

$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n\times n\ =n^2$

例3 (1) 计算①$1+3+5+\cdots+19$　　②$1+3+5+\cdots+99$

分析 算式属于奇数列求和，可以直接用等差数列也可以直接用个数的平方计算。

①原式 $=[(19-1)\div2+1]^2$

$=10^2$

$=100$

②原式 $=[(99-1)\div 2+1]^2$

$=50^2$

$=2500$

(2) 计算 $11+13+15+\cdots+99$

分析 该题不能直接用奇数列公式求和,但是可以用借来还去的方法变成奇数列求和。

原式 $=(1+3+5+\cdots+99)-(1+3+5+\cdots+9)$

$=50^2-5^2$

$=2500-25$

$=2475$

(3) 计算 $(1+3+5+\cdots+201)-(2+4+6+\cdots+200)$

分析 第一个算式可以直接运用奇数列求和,第二个算式可以提取公因数 2 后变成自然数列求和。也可以去掉括号 $3-2,5-4,7-6,\cdots,201-200$,然后相加。

方法 1 原式 $=[(201-1)\div 2+1]^2-2\times(1+2+3+\cdots+100)$

$=10201-2\times 5050$

$=101$

方法 2 原式 $=1+3+5+\cdots+201-2-4-6-\cdots-200$

$=1+(3-2)+(5-4)+(201-200)$

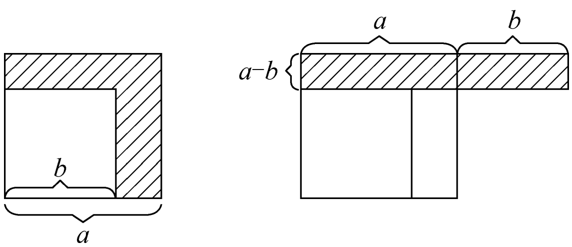
$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{101个“1”}$

$=101$

秘籍 4 平方差公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

推导:可以用数形结合。



上左图的阴影部分的面积 $=a^2-b^2$,上右图的阴影的面积 $=(a+b)(a-b)$,由此可知上右图的阴影部分与上左图的阴影部分相同,所以 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

例 4 (1) 计算①$33^2-30^2$ ②$67^2-65^2$ ③$121^2-120^2$

分析 算式都属于平方差公式。

①原式 $=(33+30)\times(33-30)$

$=63\times 3$

$=189$

②原式 $=(67+65)\times(67-65)$

$=132\times 2$

$=264$

③原式 $=(121+120)\times(121-120)$

$=241\times1$

$=241$

（2）计算①$99\times101$　　②$56\times44$　　③$307\times293$

分析 观察算式发现 $99=100-1$，$101=100+1$，可以运用平方差公式计算。同理 $56=50+6$，$44=50-6$。$307=300+7$，$293=300-7$。均可运用平方差公式计算。

①原式 $=(100-1)\times(100+1)$

$=100^2-1^2$

$=10000-1$

$=9999$

②原式 $=(50+6)\times(50-6)$

$=50^2-6^2$

$=2500-36$

$=2464$

③原式 $=(300+7)\times(300-7)$

$=300^2-7^2$

$=90000-49$

$=89951$

例 5 计算 $20^2-19^2+18^2-17^2+16^2-15^2+\cdots+2^2-1$

分析 算式都是由平方差构成，添括号就可以运用公式计算。

原式 $=(20^2-19^2)+(18^2-17^2)+(16^2-15^2)+\cdots+(2^2-1)$

$=(20-19)\times(20+19)+(18-17)\times(18+17)+(16-15)\times(16+15)+\cdots+(2-1)\times(2+1)$

$=20+19+18+17+16+15+\cdots+2+1$

$=(1+20)\times20\div2$

$=210$

例 6 已知 $a^2-b^2=133$，a、b 是正整数，求 a、b 的值

分析 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 只要把 133 写成两个正整数的积（$133=1\times133=19\times7$），再运用和差公式分别求出 a、b。

原式 $=(a+b)(a-b)$

$=133\times1=19\times7$

$$\begin{cases}a+b=133\\a-b=1\end{cases}$$

所以 $a=(133+1)\div2=67$，

$b=67-1=66$。

或者 $\begin{cases}a+b=19\\a-b=7\end{cases}$

所以 $a=(19+7)\div2=13$，

$b=19-13=6$。

秘籍总结

常见公式总结：

1. 连续的自然数求和：$1+2+3+\cdots+n=(1+n)\times n\div2$

2. 山顶和：$1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1=n^2$
3. 天下无双，个数平方：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$
4. 平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

秘籍修炼6

练 1 计算(1)$1+2+3+\cdots+20$　　(2)$1+2+3+\cdots+30$

(3)$2+4+6+\cdots+20$　　(4)$10+11+12+\cdots+20$

练 2 计算(1) $1+2+3+4+5+\cdots+20+\cdots+5+4+3+2+1$

(2)$1+2+3+\cdots+44+45+44+\cdots+3+2+1$

(3) $2+4+6+\cdots+18+\cdots+6+4+2$

(4)$2+4+6+\cdots+22+\cdots+6+4+2$

(5)$21+22+23+\cdots+50+\cdots+23+22+21$

练 3 计算(1)$1+3+5+\cdots+15$　　(2)$1+3+5+\cdots+29$

(3)$9+11+13+\cdots+29$　　(4)$11+13+15+\cdots+23$

练 4 计算(1)33^2-32^2　　69^2-67^2　　2009^2-2008^2

(2)31×29　　19×21　　302×298

练 5 计算$10^2-9^2+8^2-7^2+6^2-5^2+\cdots+2^2-1$

练 6 已知 $a^2-b^2=27$，a、b 是正整数，求 a、b 的值。

第7讲　小数加减法

秘籍导航

在进行小数加减法计算时,运用分组法和加补法达到凑整的目的,从而简化运算。

秘籍攻略

秘籍1　分组凑整

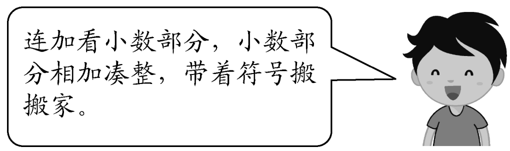
例1　(1) 计算 $4.8+3.6+2.4+1.2$

分析　进行小数连加的计算时,如果小数部分相加可以凑整的就先计算。4.8 和 1.2 相加可以凑整,3.6 和 2.4 相加也可以凑整。

原式 $=(4.8+1.2)+(3.6+2.4)$

$=6+6$

$=12$



(2) 计算 $0.876+0.765+0.564+0.795$

分析　小数部分的最后一位相加可以凑整的先计算。

原式 $=(0.876+0.564)+(0.765+0.795)$

$=1.44+1.56$

$=3$

(3) 计算 $200.6+20.06+2.006+99.4+9.94+0.994$

分析　小数部分相加可以凑整。

原式 $=(200.6+99.4)+(20.06+9.94)+(2.006+0.994)$

$=300+30+3$

$=333$

例2　(1) 计算 $13.78-1.234-10.766$

分析　两个减数的小数部分互补,可以把两个减数部分添上括号。

原式 $=13.78-(1.234+10.766)$

$=13.78-12$

$=1.78$

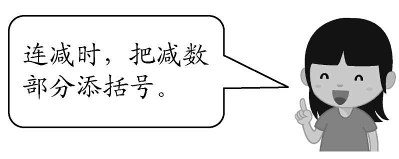
(2) 计算 $10-0.23-2.39-4.77-2.61$

原式 $=10-(0.23+2.39+4.77+2.61)$

$=10-[(0.23+4.77)+(2.39+2.61)]$

$=10-(5+5)$

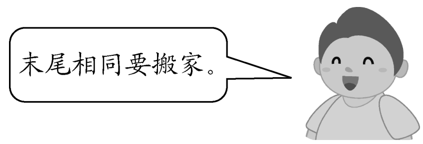
$=0$



(3) 计算 $17.84-3.9-9.84-4.1$

分析 观察算式发现要减去的三个数中的一个数与被减数小数部分相同,另外两个减数的小数部分互补。

原式 $=17.84-9.84-(3.9+4.1)$
$=8-8$
$=0$



例 3 (1) 计算 $15.4-2.17-3.83+4.6$

分析 15.4 与 4.6 相加可以凑整,而 2.17 和 3.83,前面都是减号,可以通过添括号的方式达到凑整的目的。

原式 $=(15.4+4.6)-(2.17+3.83)$
$=20-6$
$=14$

(2) 计算 $25.6-(0.23+5.6)-1.77$

分析 先去掉括号,再计算。由于括号前面是减号,所以去掉括号时要变号。

原式 $=25.6-0.23-5.6-1.77$
$=(25.6-5.6)-(0.23+1.77)$
$=20-2$
$=18$

(3) 计算 $56.43+(12.96+13.57)-(4.33+8.96)-5.67$

分析 先去掉括号,再计算。由于括号前面是减号,所以去掉括号时要变号。

原式 $=56.43+12.96+13.57-4.33-8.96-5.67$
$=(56.43+13.57)+(12.96-8.96)-(4.33+5.67)$
$=70+4-10$
$=64$

例 4 (1) 计算 $1.0-0.9+0.8-0.7+0.6-0.5+0.4-0.3+0.2-0.1$

分析 观察算式发现运算符号按“ + - ”的规律重复出现,所以前后相邻的 2 个数一组,这样每相邻的 2 个数的差都是 0.1。

原式 $=(1.0-0.9)+(0.8-0.7)+(0.6-0.5)+(0.4-0.3)+(0.2-0.1)$
$=0.1+0.1+0.1+0.1+0.1$
$=0.5$

(2) 计算 $(0.1+0.3+0.5+0.7+\cdots+9.9)-(0.2+0.4+0.6+\cdots+9.8)$

分析 算式中只有加减法运算,可以去掉括号重新组合。由于 1 ~ 99 有 50 个奇数,所以第一组有 50 个数;2 ~ 98 有 49 个偶数,所以第二组有 49 个数。将第一组和第二组两两分组重新组合,这样每相邻的 2 个数的差都是 0.1。

原式 $=0.1+0.3+0.5+0.7+\cdots+9.9-0.2-0.4-0.6-\cdots-9.8$
$=0.1+(0.3-0.2)+(0.5-0.4)+(0.7-0.6)+\cdots+(9.9-9.8)$
$=0.1+0.1\times49$
$=5$

（3）计算 $0.02-0.04-0.06+0.08+0.10-0.12-0.14+0.16+\cdots+0.34-0.36-0.38+0.40$

分析　观察算式发现运算符号按“$+--+$”的规律重复出现，所以每相邻的4个数为一组，每组的计算结果都为0。因为从2到40的自然数中一共有20个偶数，所以这个算式一共有20个小数，每4个数一组，一共有5组。

原式 $=(0.02+0.08-0.04-0.06)+(0.10+0.16-0.12-0.14)+\cdots+(0.34+0.40-0.36-0.38)$

$=0$

秘籍2　加补凑整

例5　（1）计算 $9.99+1.99+0.02$

分析　把0.02拆成 $0.01+0.01$，然后和9.99，1.99分别凑整。

原式 $=9.99+1.99+0.01+0.01$

$=(9.99+0.01)+(1.99+0.01)$

$=10+2$

$=12$

（2）计算 $1+1.9+29.7+399.6$

分析　把1拆成 $0.1+0.2+0.3+0.4$。

原式 $=0.1+0.2+0.3+0.4+1.9+29.7+399.6$

$=(1.9+0.1)+(29.7+0.3)+(399.6+0.4)+0.2$

$=2+30+400+0.2$

$=432.2$

例6　（1）计算 $1.996+19.97+199.8$

分析　观察算式发现这三个加数都接近整数，所以把它们补成接近的整数减去一个小数。

原式 $=(2-0.004)+(20-0.03)+(200-0.2)$

$=(2+20+200)-(0.004+0.03+0.2)$

$=221.766$

（2）计算 $9.996+29.98+19.9+39.5$

原式 $=(10-0.004)+(30-0.02)+(20-0.1)+(40-0.5)$

$=10+30+20+40-(0.004+0.02+0.1+0.5)$

$=100-0.624$

$=99.376$

（3）计算 $0.9+0.99+0.999+0.9999$

原式 $=(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+(1-0.0001)$

$=4-(0.1+0.01+0.001+0.0001)$

$=4-0.1111$

$=3.8889$

秘籍总结

1. 分组凑整法：

(1)把几个互为“补数”的减数先加起来，再从被减数中减去，或先减去那些与被减数有相同尾数的减数。

(2)在加、减法混合运算中，添括号时，如果添加的括号前面是“+”，那么括号内的数原运算符号不变；如果添加的括号前面是“-”，那么括号内数的原运算符号“+”变为“-”，“-”变为“+”。

(3)观察算式中运算符号的规律，恰当分组。

2. 加补凑整法：有些算式中直接凑整不明显，可以用“借数”或“拆数”的方法凑整。

秘籍修炼7

练1 计算(1)$3.47+4.58+1.53+2.42$

(2)$0.5+0.7+0.9+1.1+1.3+1.5+1.7+1.9+2.1+2.3$

练2 计算(1)$8.53-1.48-0.53-0.52$

(2)$40-9.1-9.2-9.3-0.8-9.9-0.7$

练3 计算(1)$1.348-0.234+2.234-0.348$

(2)$2.64+4.51-2.16+1.36-1.84+1.49$

练4 计算(1)$2.0-1.9+1.8-1.7+1.6-1.5+\cdots+0.4-0.3+0.2-0.1$

(2)$0.1+0.2-0.3-0.4+0.5+0.6-0.7-0.8+0.9+1.0$

练5 计算(1)$0.9+29.9+399.9$

(2)$0.19+1.99+19.99$

练6 计算(1)$1.99+2.98+3.97+4.96+5.95+0.2$

(2)$0.011+0.192+1.993+19.994+199.995$

第8讲　定义新运算

秘籍导航

解答这类题目的关键是理解新定义，严格按照新定义的式子代入数值，把新定义的运算转化成我们所熟悉的四则运算。

秘籍攻略

秘籍 1　照猫画猫

例 1　(1) 对于任意数 a、b，定义运算“$*$”为 $a*b=a\times b-a-b$，求 $12*4$ 和 $4*12$ 的值，并验证是否满足交换律。

分析　观察算式根据题目定义的运算要求，直接代入后用四则运算即可。

$12*4=12\times4-12-4=48-12-4=32$，

$4*12=4\times12-4-12=48-12-4=32$，

$a*b=b*a$，所以满足交换律。

(2) 若 $A○B$ 表示 $(A+3B)\times(A+B)$，求 $1.5○0.5$ 和 $0.5○1.5$ 的值，并验证是否满足交换律。

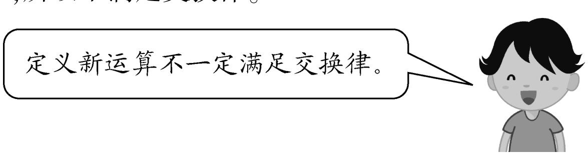
分析　要先计算 $A+3B$ 的结果，再计算 $A+B$ 的结果，最后两个结果求乘积。

由 $A○B=(A+3B)\times(A+B)$，

可得 $1.5○0.5=(1.5+3\times0.5)\times(1.5+0.5)=(1.5+1.5)\times2=3\times2=6$，

$0.5○1.5=(0.5+3\times1.5)\times(0.5+1.5)=(0.5+4.5)\times2=5\times2=10$，

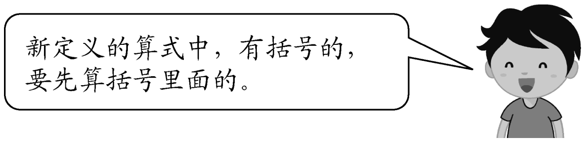
$A○B\neq B○A$，所以不满足交换律。



(3) A、B 表示两个数，定义 $A*B=2A-B$，求 $(119.8-29.8)*(13.115+12.35)$ 的值。

分析　要先把括号里的算式计算出来 $119.8-29.8=90$，$13.115+12.35=25.465$。

$(119.8-29.8)*(13.115+12.35)=90*25.465=2\times90-25.465=180-25.465=154.535$。



例 2 A、B 表示两个数，定义 $A\triangle B$ 表示 $2A+B-1.25$。

① 求 $3\triangle 1.77\ \triangle 2.99$ 的值；

② 求 $3\triangle(1.77\ \triangle 2.99)$ 的值；

③ 验证这个算式是否满足结合律。

分析 ① 先计算 $3\triangle 1.77=2\times 3+1.77-1.25=6+1.77-1.25=6.52$，

再计算 $6.52\triangle 2.99=2\times 6.52+2.99-1.25=6.52+6.52+2.99-1.25=13.04+1.74=14.78$，

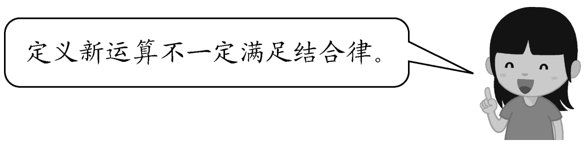
所以 $3\triangle 1.77\ \triangle 2.99=14.78$。

② 先计算括号里面的，$1.77\ \triangle 2.99=2\times 1.77+2.99-1.25=3.54+2.99-1.25=5.28$，

再计算 $3\triangle 5.28=2\times 3+5.28-1.25=6+5.28-1.25=10.03$，

所以 $3\triangle(1.77\ \triangle 2.99)=10.03$。

③ $3\triangle 1.77\ \triangle 2.99\neq 3\triangle(1.77\ \triangle 2.99)$，所以这个算式不满足结合律。



例 3 (1) 已知 a、b 是任意自然数，规定 $a※b=a+b-1$，$a\#b=ab-2$，求 $4\#(6※8)※(3\#5)$ 的值。

分析 先计算 $6※8=6+8-1=13$，$3\#5=3\times 5-2=13$，

再计算 $4\#(6※8)※(3\#5)=4\#13※13=(4\times 13-2)※13=50※13=50+13-1=62$。

(2) 规定符号"△"为选择两数中较大数，"⊙"为选择两数中较小数。

例如，$3\triangle 5=5$，$3\odot 5=3$。求 $[(7\odot 3)\triangle 5]\times[5\odot(3\triangle 7)]=$________。

分析 原式 $=[3\triangle 5]\times[5\odot 7]=5\times 5=25$。

(3) 两个不等的自然数 a 和 b，较大的数除以较小的数，余数记为 $a\odot b$，

例如，$5\odot 2=1$，$7\odot 25=4$，$6\odot 8=2$。求 $(5\odot 19)\odot 19+(19\odot 5)\odot 5$ 的值。

分析 由 $5\odot 19=4$，得 $(5\odot 19)\odot 19=4\odot 19=3$，

由 $19\odot 5=4$，得 $(19\odot 5)\odot 5=4\odot 5=1$，

$(5\odot 19)\odot 19+(19\odot 5)\odot 5=3+1=4$。

(4) 规定运算"☆"，若 $a>b$，则 $a☆b=a+b$；若 $a=b$，则 $a☆b=a+b-1$；若 $a<b$，则 $a☆b=a+b+1$。求 $(1.24☆1.24)-(1.2☆2.3)+(3.7☆2)$ 的值。

分析 先要观察 a 和 b 的大小，再代入对应的表达式。

$1.24☆1.24=1.24+1.24-1=1.48$　　$1.2☆2.3=1.2+2.3+1=4.5$

$3.7☆2=3.7+2=5.7$

$$\begin{aligned}&(1.24☆1.24)-(1.2☆2.3)+(3.7☆2)\\=&1.48-4.5+5.7\\=&1.48+5.7-4.5\\=&2.68\end{aligned}$$

秘籍2 照猫画虎

例4 (1)"⊙"表示一种新的运算符号,已知 $2\odot3=0.2+0.3+0.4$,$7\odot2=0.7+0.8$,$3\odot5=0.3+0.4+0.5+0.6+0.7$,……,按此规则,求 $5\odot9$ 的值。

分析 从已知条件可归纳出运算规则:"⊙"表示几个连续小数之和,"⊙"前面的数表示第一个加数的小数部分,后面的每个加数小数部分加 1 递增,"⊙"后面的数表示加数的个数。

$5\odot9=0.5+0.6+0.7+0.8+0.9+1.0+1.1+1.2+1.3=0.9\times9=8.1$

(2)如果 $1\Delta3=1+11+111$,$2\Delta5=2+22+222+2222+22222$,$8\Delta2=8+88$,求 $6\Delta5$ 的值。

分析 仔细观察发现"Δ"前面的数字是每个加数个位上的数字,而加数分别是一位数,二位数,三位数,……,"Δ"后面的数字是几,就有几个加数,按照这个规律进行解答。

$6\Delta5=6+66+666+6666+66666=74070$

(3)已知 $5\ \$\ 3=5\times6\times7$,$3\ \$\ 6=3\times4\times5\times6\times7\times8$,求 $(4\ \$\ 3)+(6\ \$\ 2)$ 的值。

分析 仔细观察发现"\$"前面的数字是乘数的第一个数,后面的乘数依次比前面的大 1,"\$"后面的数字是几,就有几个乘数。

$4\ \$\ 3=4\times5\times6=120$

$6\ \$\ 2=6\times7=42$

$(4\ \$\ 3)+(6\ \$\ 2)=120+42=162$

例5 有一个数学运算符号"&",使下列算式成立:2&4 = 8 ,5&3 = 13 ,9&7 = 25。

① 求 2&14 的值,并说明是否满足交换律;② 求(3&9)&6 的值。

分析 ① 观察算式发现规律 $a\&b=2a+b$,所以 $2\&14=2\times2+14=18$,$14\&2=2\times14+2=30$,$2\&14\neq14\&2$,所以不满足交换律。

② $(3\&9)\&6=(2\times3+9)\&6=15\&6=2\times15+6=36$

秘籍3 将文字叙述转换成数学算式

例6 (1)同学们在做这样一个数字游戏:一张带有数字的卡片在 A,B,C,D 四位同学间传递,当传递给 A 时,A 将该数乘 5 传出;当传递给 B 时,B 将数除以 2 传出;当传递给 C 时,C 将数加 18 传出;当传递给 D 时,D 将数除以 9 后交给主持人。如果一张卡片经过 A 传递给 B 记为 A→B,那么一张带有 18 的数字卡片,经过 A→B→C→D 的传递后交给主持人时卡片上的数是______。

分析 这类题的特点是文字比较多,应耐心读完题,再把文字叙述转换成数学算式。

A→B→C→D $=(18\times5\div2+18)\div9=63\div9=7$

(2)国际统一书号 ISBN 由 10 个数字组成,前面 9 个数字分成 3 组,分别用来表示区域、出版社和书名,最后一个数字则作为核检码。核检码可以根据前 9 个数字按

照一定的顺序算得。例如:某书的书号是 ISBN 7－107－17543－2,它的核检码的计算顺序是:

① $7\times10+1\times9+0\times8+7\times7+1\times6+7\times5+5\times4+4\times3+3\times2=207$;

② $207\div11=18\cdots\cdots9$;

③ $11-9=2$。这里的 2 就是该书号的核检码。

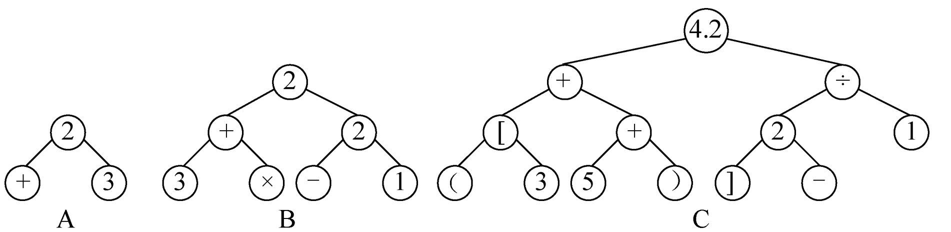
依照上面的顺序,求书号 ISBN 7－303－07618－□的核检码。

分析 $7\times10+3\times9+0\times8+3\times7+0\times6+7\times5+6\times4+1\times3+8\times2=196$,

$196\div11=17\cdots\cdots9$,

$11-9=2$,所以该书号的核检码是 2。

(3) 在计算机中,下图中的数据进行运算的读法规则是:每次分叉都按照“中→左→右”的顺序来读。先读中间圆圈中的内容,再读与它相连的左边圆圈中的内容,最后读右边圆圈中的内容。如下图中图 A 表示 $2+3$,图 B 表示 $2+3\times2-1$。图 C 中表示的式子的运算结果是________。



分析 按"中→左→右"的顺序列算式得 $4.2+[(3+5)\div2]-1=4.2+4-1=7.2$。

秘籍总结

一是认真审题,深刻理解新定义的内容,新定义的内容是人为规定的运算形式;

二是排除干扰,按新定义规则去掉新运算符号;

三是化新为旧,将新定义转化成已有知识做旧运算。

秘籍修炼 8

练 1 (1)已知 $a★b=(a+b)\div b$,求 $8★5$ 和 $5★8$ 的值。

(2)定义运算“⊖”为 $a⊖b=5\times a\times b-(a+b)$,求 $11⊖12$ 和 $12⊖11$ 的值。

练 2 (1)设 a、b 表示两个不同的数,规定 $a\triangle b=3a+4b$,求 $(8\triangle7)\triangle6$ 和 $8\triangle(7\triangle6)$ 的值。

(2)设 $A\oplus B=2(A+B)-2(A\div B)$,求 $70\oplus(18\oplus4)$的值。

练 3　(1)两个整数 a 和 b,a 除以 b 的余数记为 $a☆b$。

例如,$13☆5=3$,$5☆13=5$,$12☆4=0$。

根据这个定义,求$(26☆9)☆4=$________。

(2)规定符号“&”为选择两数中较大的数进行运算,“◎”为选择两数中较小的数进行运算。求$[(7◎3)\&15]\times[5◎(3\&7)]$的值。

练 4　(1)设 a、b、c、d 是自然数,定义 $<a,b,c,d>=ad+bc$,求 $<4,1,2,3>$ 的值。

(2)规定 $a\oplus b=a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+b-1)$($a$,$b$ 均为自然数,$b>a$),求 $3\oplus10$ 的值。

练 5　已知 $2*3=2+22+222=246$,$3*4=3+33+333+3333=3702$。

求①$3*3$ 的值,②$4*5$ 的值。

练 6　(1)有一个数学运算符号“⊗”,使下列算式成立:$4⊗8=16$,$10⊗6=26$,$6⊗10=22$,$18⊗14=50$。求 $7⊗3$ 的值。

(2)小辉用电脑设计了 A、B、C、D 四种装置,将一个数输入一种装置后,会输出另一个数。装置 A 将输入的数加上 5;装置 B 将输入的数除以 2;装置 C 将输入的数减去 4;装置 D 将输入的数乘 3。这些装置可以连接,如果装置 A 后面连接装置 B,就写成 A·B,输入 1 后,经过 A·B 输出了 3。那么,输入 9,经过 A·B·C·D 将输出几?

第9讲　高斯记号

秘籍导航

熟记并掌握高斯记号的取值，把高斯记号转换成整数或小数，然后再计算。

秘籍攻略

秘籍 1　高斯记号的定义

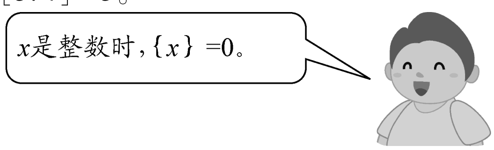
例 1　（1）$[2.5]=$__________

分析　x 是任意一个数，$[x]$ 表示取 x 的整数部分，所以 $[2.5]=2$。

（2）$[5.4]=$__________

分析　$[x]$ 表示取 x 的整数部分，所以 $[5.4]=5$。

（3）$\{3.78\}=$__________



分析　x 是任意一个数，$\{x\}$ 表示取 x 的小数部分，所以 $\{3.78\}=0.78$。

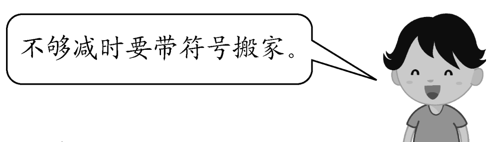
（4）$\{100\}=$________

分析　$\{x\}$ 表示取 x 的小数部分，而 100 没有小数部分，所以就是 0，$\{100\}=0$。

秘籍 2　先转换再计算

例 2　（1）计算 $\{0.8\}-[17.1]+[23.2]$

分析　先通过高斯记号转换，注意应该取整数还是取小数，再进行计算。



原式 $=0.8-17+23$

$=0.8+23-17$

$=6.8$

（2）计算 $\{0.9\}+\{1.99\}+\{2.999\}+\{3.9999\}$

分析　每个加数都是取小数部分，所以先取小数，再进行计算。取小数后，可以发现加数有一定的规律，而且都接近 1，因此可以用拆补的方法来进行巧算。

原式 $=0.9+0.99+0.999+0.9999$

$=(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+(1-0.0001)$

$=1\times4-(0.1+0.01+0.001+0.0001)$

$=4-0.1111$

$=3.8889$

（3）计算$[208\times83\div208]+\{26\times24\div25\}$

分析 高斯记号内部有运算的，应该先计算，得出结果后再进行高斯记号的计算。

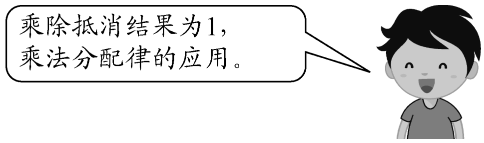
原式$=83+\{(25+1)\times24\div25\}$

$=83+\{624\div25\}$

$=83+\{24.96\}$

$=83+0.96$

$=83.96$



秘籍3 先找规律再计算

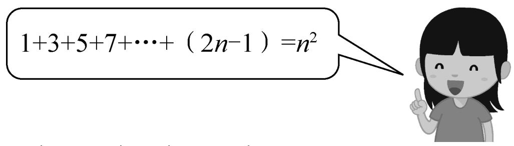
例3 （1）计算$[1.1]+[3.2]+[5.3]+[7.4]+\cdots+[99.50]$

分析 $[1.1]=1,[3.2]=3,[5.3]=5,[7.4]=7,\cdots,[99.50]=99$。

原式$=1+3+5+7+\cdots+99$

$=50\times50$

$=2500$



（2）计算$\{1\div5\}+\{2\div5\}+\{3\div5\}+\cdots+\{19\div5\}+\{20\div5\}$

分析 $\{1\div5\}=0.2,\{2\div5\}=0.4,\{3\div5\}=0.6,\{4\div5\}=0.8,\{5\div5\}=0,$ $\{6\div5\}=0.2,\cdots$,5 个数为 1 周期，一共有 $20\div5=4$ 个周期。

原式$=(0.2+0.4+0.6+0.8+0)\times4=8$

（3）$[1\div100],[2\div99],[3\div98],[4\div97],\cdots,[99\div2],[100\div1]$，这组数中有____个数不小于 1。

分析 不小于 1 即等于或大于 1，被除数是从 1 ~ 100 的连续自然数，除数是从 100 ~ 1的递减自然数，每一组被除数与除数的和都是 101，从$[51\div50]=1$ 开始，共有 50 个数不小于 1。

例4 （1）$34\div4=8\cdots\cdots2$，则$[34\div4]=$______，$\{34\div4\}=$________。

分析 $34\div4$ 的整数部分就是商，因此$[34\div4]=8$，$\{34\div4\}$相当于余数除以 4，因此$\{34\div4\}=0.5$。

（2）已知 $a\div125=b\cdots\cdots10$，$[a\div125]=6$，求$\{a\div125\}=$ ____ 。

分析 $a\div125$ 的整数部分是商，小数部分是余数除以 125。

方法 1　$b=6,a=6\times125+10=760,\{760\div125\}=0.08$。

方法 2　$b=6,\{a\div125\}=10\div125=0.08$。

（3）已知 $a\div20=3\cdots\cdots b$，$\{a\div20\}=0.45$，求$[a\div20]=$ ____ ，$a=$ ____ 。

分析 $a\div b=q\cdots\cdots r$，$[a\div b]=q$，$\{a\div b\}=r\div b$，所以$[a\div20]=3$，$b=0.45\times20=9$，$a=3\times20+9=69$。

例5 （1）1 ~ 1000 中有____个 3 的倍数。

分析 高斯记号的应用实例，相当于计算 1 ~ 1000 中能够被 3 整除的数有多少个，也就是计算 1000 除以 3 的整数部分是多少。

$[1000 \div 3] = 333$ 所以，$1 \sim 1000$ 中有 333 个 3 的倍数。

(2) $1 \sim 100$ 中 2 的倍数或 3 的倍数共有____个。

分析 2 的倍数的个数：$[100 \div 2] = 50$

3 的倍数的个数：$[100 \div 3] = 33$

6 的倍数的个数：$[100 \div 6] = 16$

在这里，要去掉 2 和 3 的倍数的公共部分，即减去 6 的倍数的个数，所以 $50 + 33 - 16 = 67$

秘籍 4 先推理再计算

例 6 (1) $\begin{cases}\{x\} + \{y\} = 1.1, \\ [x] + [y] = 28,\end{cases}$ 已知 $x = 11.3$，则 $y =$ ____ 。

分析 由 $x = 11.3$ 得 $[x] = 11$，$\{x\} = 0.3$，$[y] = 28 - 11 = 17$，$\{y\} = 1.1 - 0.3 = 0.8$

所以 $y = 17 + 0.8 = 17.8$。

(2) $\begin{cases}[x] + \{y\} = 2.8, \\ \{x\} + [y] = 11.5,\end{cases}$ 则 $x =$ ____ ，$y =$ ____ 。

分析 由 $[x] + \{y\} = 2.8$ 可知 $\begin{cases}[x] = 2, \\ \{y\} = 0.8,\end{cases}$ 由 $\{x\} + [y] = 11.5$ 可知 $\begin{cases}\{x\} = 0.5, \\ [y] = 11,\end{cases}$

则 $\begin{cases}x = 2 + 0.5 = 2.5, \\ y = 11 + 0.8 = 11.8。\end{cases}$

秘籍总结

1. $[x]$：x 是任意一个数，取 x 的整数部分。
2. $\{x\}$：x 是任意一个数，取 x 的小数部分。
3. $\{x\} = x - [x]$

   $x = [x] + \{x\}$
4. 如果 $a \div b = q \cdots\cdots r (0 \leqslant r < b)$，那么 $[a \div b] = q$，$\{a \div b\} = r \div b$。

秘籍修炼 9

练 1 计算 (1) $\{0.98\}$　　(2) $[110]$

(3) $\{12\}$　　(4) $[5.6]$

练 2 计算 (1) $\{9.7\} - [16.1] + [123.2]$

(2) $\{0.8\} + \{1.98\} + \{2.998\} + \{3.9998\} + \{4.99998\}$

(3) $\{126 \times 100 \div 125\}$

(4) $[13 \times 48 \div 26 \div 3]$

练 3　计算(1) $[1.1]+[2.2]+[3.3]+[4.4]+\cdots+[100.100]$

(2) $\{1\div10\}+\{2\div10\}+\{3\div10\}+\cdots+\{30\div10\}$

练 4　计算(1)已知 $a\div25=b\cdots\cdots5$, $[a\div25]=4$,求 $a=$ ____ 。

(2)已知 $a\div10=7\cdots\cdots b$, $\{a\div10\}=0.5$,求 $[a\div10]=$ ____ , $a=$ ____ 。

练 5　(1)1 ~100 中有____个是 3 的倍数或是 5 的倍数的数。

(2)计算 $\{1\div5\}+\{2\div5\}+\{3\div5\}+\cdots+\{22\div5\}+\{23\div5\}$

练 6　计算(1) $\begin{cases}\{x\}+\{y\}=0.8,\\ [x]+[y]=47,\end{cases}$ 已知 $x=31.5$,则 $y=$ ____ 。

(2) $\begin{cases}x+[y]=15.3,\\ \{x\}+y=7.8,\end{cases}$ 则 $x=$ ____ , $y=$ ____ 。

第10讲　数列与数表

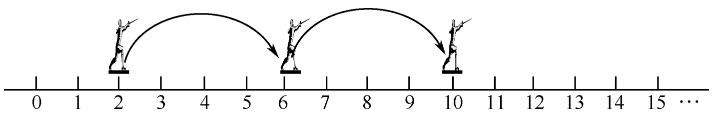
秘籍导航

从一些有特点的数列或数表中找出其内在联系,总结规律,完成要求。

秘籍攻略

秘籍 1　较简单的数列

例 1 下图是一个特制的“跳棋盘”,它是一条直线,在这条直线上有标有数字 0,1,2,3,4,…的等距离刻度。



剪一些小纸人作为跳子,跳子的规则是可由任何一个刻度为起点,只要每次跳的格数是有规律的即可。我们只要知道现在的位置和每次跳动的格数,就可以猜出连续跳几步以后的终点刻度是什么。

下面是按照几种不同的跳法得到的几列数,试找出其排列规律,然后再填空。

(1) 1,3,5,7,(　　);

(2) 2,4,6,8,(　　);

(3) 3,8,13,18,23,(　　);

(4) 12,15,18,(　　),24;

(5) 13,20,27,34,…,第 20 个数是(　　),83 是第(　　)个数。

分析 第 1、2 行容易找到规律:第 1 行是奇数列,第 2 行是偶数列。答案分别是 9,10。

第 3 行数的规律:$3+5=8$,$8+5=13$,$13+5=18$,$18+5=23$,所以后面一个数应是 $23+5=28$。

第 4 行数的规律:$12+3=15$,$15+3=18$,所以括号内的数应是 $18+3=21$。

第 5 行数的规律:第二项是 $20=13+7$,第三项是 $13+2\times7=27$,第四项 $13+3\times7=34$,所以第一个括号内的数应是 $13+19\times7=146$,第二个括号内的数应是 $(83-13)\div7+1=11$。

例 2 (1) 下面是一串有规律的数:1,6,13,22,33,46,61,78,…,这串数中的第二十个数是多少?

分析 $6-1=5$,$13-6=7$,$22-13=9$,$33-22=11$,…,用后一个数字减去前一个数字可以得到一个以 5 开头的奇数列。第一个数是 1,第二个数是 $1+5=6$,第三个数是 $1+5+7=13$,第四个数是 $1+5+7+9=22$,……,所以第二十个数是 $1+5+$

$7+9+11+\cdots+41=438$。

(2) 下面是一串有规律的数:1,4,9,16,25,36,49,64,…,这串数中的第二十个数是多少?

分析 **方法1**　第一个数是 $1=1^2$,第二个数是 $4=2^2$,第三个数是 $9=3^2$,第四个数是 $4=4^2$,……,第 20 个数是 $20^2=400$。

方法2　第一项是1,第二项是 $4=1+3$,第三项是 $9=1+3+5$,第四项是 $16=1+3+5+7$,……,可以看成是1,3,5,7,9,11,…的奇数列,所以第二十项是 $1+3+5+7+9+11+\cdots+39=400$,第二十个数是400。

秘籍2　复杂的数列

例3 (1) 下面是一串有规律的数:1,2,4,8,16,32,64,…,这串数中的第十个数是多少?

分析 这是一串等比数列,第一个数是1,第二个数是 $1\times2=2$,第三个数是 $1\times2\times2=4$,第四个数是 $1\times2\times2\times2=8$,……,第十个数是 $1\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=512$。

(2) 下面是一串有规律的数:1,1,2,3,5,8,13,…,这串数中的第十个数是多少?

分析 从第三个数开始,后一个数是前两个数的和。如下表所示:

个数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
和数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…

所以这串数中的第十个数是55。

(3) 有一列数1,2,4,7,11,16,22,…,问第一百零一个数是多少?

分析 第一个数是1,

第二个数 $1+1=2$,

第三个数是 $1+1+2=4$,

第四个数是 $1+1+2+3=7$,

第五个数是 $1+1+2+3+4=11$,

……

所以,第一百零一个数是 $1+1+2+3+4+\cdots+100=5051$。

(4) 下面的算式是按某种规律排列的。

$1+1,2+3,3+5,4+7,1+9,2+11,3+13,4+15,1+17,\cdots$

则第一百个算式是(　　)+(　　)。

分析 第一个加数依次是1,2,3,4,1,2,3,4,…,每四个数循环一次。因为 $100\div4=25$,可以整除,所以第一个加数是周期的末尾数4。第二个加数是1,3,5,7,9,…,是个奇数列,所以第一百个奇数是 $2\times100-1=199$。

所以第一百个算式是 $4+199$。

秘籍3 简单数表计算

例4 （1）下面宝塔算式的第十一层算式的和是多少？

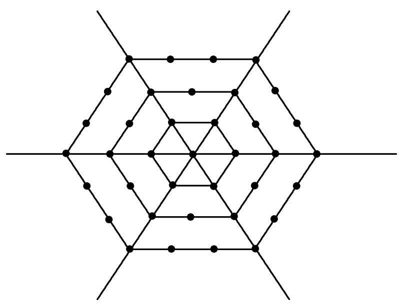
$$1$$
$$2+3$$
$$4+5+6$$
$$7+8+9+10$$
$$\cdots$$

分析 算式每层的数的个数与层数相等，所以从第一层到第十层共有 $1+2+3+4+\cdots+10=(1+10)\times10\div2=55$（个）数，所以第十一层的第一个数为 56，最后一个数为 $56+10=66$。

所求第十一层的和应为

$56+57+58+59+\cdots+66$
$=(56+66)\times11\div2$
$=122\div2\times11$
$=61\times11$
$=671$

（2）有一个六边形点阵（如下图），它的中心是 1 个点，算作第一层；第二层每边 2 个点（相邻两边共用一个点）；第三层每边 3 个点；……。这个六边形点阵共有一百层，问第一百层有多少个点？这个点阵共有多少个点？



分析 第二层有 6 个点；第三层每边有 3 个点，即第三层的六边形每边上第二层的每边增加了 1 个点，所以第三层共有 6 +6 个点；第四层的六边形每边上又比第三层的每边增加了 1 个点；因此有如下规律：

第二层有点：$6=1\times6$（个）；

第三层有点：$6+6=2\times6$（个）；

第四层有点：$6+6+6=3\times6$（个）；

……

第一百层有点：$\underbrace{6+6+6+\cdots+6}_{99个“6”}=99\times6$（个）

所以第一百层共有点：$99\times6=594$（个）。

这个点阵的一百层总共有点：

$$
\begin{aligned}
&1+6+2\times6+3\times6+\cdots+99\times6\\
=&1+6\times(1+2+3+\cdots+99)\\
=&1+6\times4950\\
=&1+29700\\
=&29701(\text{个})
\end{aligned}
$$

秘籍 4　稍复杂数表中的计算

例 5　自然数按一定规律排列如下表所示：

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	第 5 列	第 6 列	…
第 1 行	1	4	9	16	25	36	…
第 2 行	2	3	8	15	24	…	…
第 3 行	5	6	7	14	23	…	…
第 4 行	10	11	12	13	22	…	…
第 5 行	17	18	19	20	21	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…

从排列规律可知，99 排在第（　　）行第（　　）列。

分析　表格中自然数的排列规律：

n^2 排在第 1 行第 n 列，

因为 $99=100-1=n^2-1$，

这里 $n=10$，99 应排在 2(1+1) 行，第 10 列。

所以 99 排在第 2 行第 10 列。

例 6　把从 1 ~ 100 的数排成下面的数表，在这个数表里面，把横的方面的三个数、纵的方面的三个数（中间的一个数为公共数），一共五个数用框围起来（如下图所示）。若使围起来的五个数的和为 370 时，线框里面应该是哪五个数？

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
…	…	…	…	…	…	…
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

分析　认真观察可以发现：

(1) 线框里的数，横向的三个数构成等差数列，差为 1；

(2) 纵向的三个数也构成等差数列，差为 7；

(3) 中间的数 17 是横向三个数的平均数，也是纵向三个数的平均数，因此最中

间的数是 $370\div5=74$,但需要检验存在性。如果 74 排在第一列、第七列、第一行、最后一行这四个位置就不存在,用 $74\div7=10\cdots\cdots4$,即 74 在第 11 行的第四列,肯定存在。所以右边的数是 $74+1=75$,左边的数是 $74-1=73$,上边的数是 $74-7=67$,下边的数是 $74+7=81$。即线框中的五个数为

	67	
73	74	75
	81	

秘籍总结

见到数列数表,仔细找规律。
有加有减也有乘与除,多归纳多总结,答案会呈现。

秘籍修炼10

练 1 观察分析下面各列数的变化规律,根据这个规律,在括号里填上合适的数。

(1)7,11,15,19,23,(　　),31,…;
(2)1,4,3,6,5,8,(　　),(　　),9,12,…;
(3)1,4,9,16,25,(　　),49,…;
(4)1,2,4,8,16,(　　),64,…。

练 2 观察下面的五个数:19,37,55,a,91 排列的规律,推知 $a=$(　　)。

练 3 先观察下面各算式,找出规律,然后在括号里填上合适的数。

$$2+1\times9=11,$$
$$3+12\times9=111,$$
$$4+123\times9=1111,$$
$$5+1234\times9=(\quad),$$
$$\cdots$$
$$9+12345678\times9=(\quad)。$$

练 4 $3+12$,$6+10$,$12+8$,$24+6$,$48+4$,…,是按一定规律排列的一串算式,其中第六个算式是(　　)。

练 5　自然数 1,2,3,…,按下图排成一个数阵,请回答下列问题:

① 第一行中自左至右第八个数是几?

② 自上至下第十行中第八个数是几?

1	3	6	10	15	…
2	5	9	14	…	…
4	8	13	…	…	…
7	12	…	…	…	…
11	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…

练 6　把 1 ~200 的数像下表那样排列,用正方形框子围住横的三个数、竖的三个数,这九个数的和是 162,如果在数表的另外的地方,也用正方形围住另外的九个数。

① 当正方形左上角的数是 100 时,这九个数的和是多少?

② 当正方形中九个数的和是 1557 时,最大的数是多少?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	195	196
197	198	199	200			

第11讲　数字谜

秘籍导航

通过观察、判断、推理，尝试把算式中缺少的数填出来，从而达到提高推理能力和深入理解运算法则的目的。

秘籍攻略

秘籍1　"打包"求和

例1　(1) 短语"my favorite"中，不同字母代表不同数字，求这些数字的和 $m+y+f+a+v+o+r+i+t+e=$ ________。

分析　一共有十个不同的字母，正好代表 0～9 十个不同的数字，所以

$m+y+f+a+v+o+r+i+t+e=0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$。

(2) 如下图所示，不同字母代表不同的数字，求 $A+B+C+D+E+F+G=$ ____。

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D \\ +\quad E\ F\ G \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

分析　方法1　由于 $D+G$ 的和是 0，D 和 G 为不同的数字，所以 $D+G=10$，向十位进 1，$C+F=10$，向百位进 1，$B+E=9$，向千位进 1，$A=1$。所以 $A+B+C+D+E+F+G=1+10+10+9=30$。

方法2　加数的数字之和每进一次位减少 9，此题 $A+B+C+D+E+F+G$ 正好是所有的加数的数字之和，通过观察得知进了三次位，减少了 $3\times9=27$，和的数字之和为 $2+0+1+0=3$，所以 $A+B+C+D+E+F+G=27+3=30$。

(3) 下列两个算式中，相同字母代表相同的数字，不同字母代表不同的数字，求 $A+B+C+D+E+F+G=$ ________。

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D \\ +\quad E\ F\ G \\ \hline 2\ 0\ 0\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} D\ C\ B\ A \\ +\quad G\ E\ F \\ \hline 9\ 3\ 8\ 7 \end{array}$$

分析　方法1　由第一个算式的百位数字 0，可知百位必向千位进 1，所以 $A=1$，由第一个算式的十位数字 0，可知十位必向百位进 1，所以 $B+E=9$，$C+F=9$，由第二个算式的千位数字 9，可知 D 可能等于 8 或者 9，结合第一个算式的个位数字 7 可知 $D+G=17$，所以 $A+B+C+D+E+F+G=1+9+9+17=36$。

方法2　加数的数字之和每进一次位减少 9，由第二个算式的千位数字 9，可知 D 可能等于 8 或者 9，结合第一个算式的个位数字 7，所以在第一个算式中个位必向十位进1，由第一个算式的百位数字0，可知百位必向千位进1，由第一算式的十位数字0，可知十位必向百位进1，所以在第一个算式中一共进了三次位，减少了 $3\times9=27$，和

的数字之和为 $2+0+0+7=9$，所以 $A+B+C+D+E+F+G=27+9=36$。

例 2　(1) 从 1 ~9 中选出 8 个不同的数字填入下面的方框内，使得竖式成立，其中未选中的数字是______。

$$\begin{array}{r}\square\square\\ \square0\square\\ +\ \square\square\square\square\\ \hline 2010\end{array}$$

分析　加数的数字之和每进一次位减少 9，加数的数字之和为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9-$“没选中的数字”，和的数字之和为 $2+0+1+0=3$，“加数的数字之和”$-$“和的数字之和”$=9\times$进位的次数，所以 $1+2+4+5+6+7+8+9-$“没选中的数字”$=9\times$进位的次数，从竖式可分析进位的次数为 4，可得没选中的数字是 6。

(2) 将数字 1 ~9 填入下图竖式的 9 个方框内，每个数字只能用一次，那么和的最小值为______。

$$\begin{array}{r}\square2\\ \square0\square\\ +\ \square1\square\square\\ \hline 3\square\square\square\end{array}$$

分析　方法 1　要让和最小，和的百位一定是 1，这样第三个加数的千位为 2，第二个加数的十位为 0，和的十位最小是 3。这样剩下两个十位的数之和为 12，经试验分别为 4 和 8 时可以，个位 $2+6+7=15$，所以和最小为 3135。

方法 2　加数的数字之和每进一次位减少 9，加数之和为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9-$没选中的数字的和$+1+0+2$，和的数字之和 $3+$没选中的数字的和，加数的数字之和$-$和的数字之和$=9\times$进位的次数；所以 $1+2+3+4+5+6+7+8+9-$没选中的数字的和$+1+0+2-(3+$没选中的数字的和$)=9\times$进位的次数，可得 $45-2\times$没选中的数字的和$=9\times$进位的次数；没选中的数字之和为 9，$1+3+5=9$，或 $2+3+4=9$，或 $1+2+6=9$，第三个加数千位一定是 2，所以只有 $1+3+5=9$ 符合，所以和最小是 3135。

秘籍 2　个位分析和高位分析

例 3　(1) 下面不同的汉字代表不同的数字，相同的汉字代表相同的数字。那么它们各表示几？

$$\begin{array}{r}2\,\text{计}\,\text{算}\,\text{秘}\,\text{籍}\,\text{好}\\ \times\qquad\qquad\quad 3\\ \hline \text{计}\,\text{算}\,\text{秘}\,\text{籍}\,\text{好}\,2\end{array}$$

分析　由积的个位是 2，乘数是 3，可推出第一个因数个位上“好”是 4，$4\times3=12$，在积的个位上写 2，向十位进 1；因为积的十位上“好”为 4，所以“籍”$\times3$ 应为 3，推出“籍”为 1；因为“籍”为 1，百位上“秘”$\times3$ 末位应为 1，因而“秘”为 7，千位上 $5\times3+2=17$，向万位进 1，因而“算”为 5，万位上 $8\times3+1=25$，向前一位进 2，因而

“计”为 8。

(2) 在下面的乘法算式中,字母 A、B 和 C 分别代表一个不同的数字,每个方框代表一个非零数字。求 A、B 和 C 分别代表什么数字?

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & & A & B & C \\
\times & & & & A & B & C \\
\hline
 & & & \square & \square & \square & 9 \\
 & & \square & \square & \square & 4 & \\
 & \square & \square & \square & 1 & & \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

分析 第一部分积中的 9 是 C × C 的个位数字,所以 C 要么是 3,要么是 7。如果 C = 3,第二部分积中的 4 是积 3 × B 的个位数字,所以 B = 8。同理,第三个部分积中的 1 是积 3 × A 的个位数字,因此 A = 7。检验可知 A = 7,B = 8,C = 3 满足题意。如果 C = 7,类似地可知 B = 2,A = 3,但这时第二个部分积 327 × 2 不是四位数,不合题意。所以 A、B 和 C 代表的数字分别是 7,8,3。

(3) 在下面的方框内填上合适的数字。

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & \square & 7 & 6 \\
\times & & & & \square & \square \\
\hline
 & & 1 & 8 & \square & \square \\
 & \square & \square & \square & \square & \\
\hline
 & 3 & 1 & \square & \square & 0
\end{array}$$

分析 由积的末尾是 0,可推出第二个因数的个位是 5;由第二个因数的个位是 5,并结合第一个因数与 5 相乘的积的情况考虑,可推出第一个因数的百位是 3;由第一个因数为 376,积为 31□□0,可推出第二个因数的十位是 8。题中其他的方框就容易填了。即:

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & 3 & 7 & 6 \\
\times & & & & 8 & 5 \\
\hline
 & & 1 & 8 & 8 & 0 \\
 & 3 & 0 & 0 & 8 & \\
\hline
 & 3 & 1 & 9 & 6 & 0
\end{array}$$

例 4 (1) 在算式□17 × 2□ = 3□□3 的方框中填入合适的数字,使等式成立。

分析 因为积的个位是 3,第一个因数的个位是 7,所以第二个因数的个位是 9;由于积的最高位是 3,也就是积是一个三千多的数,而第二个因数是 29,因此第一个因数小于 200,所以第一个因数的百位数字是 1,即 117 × 29 = 3393。

(2) 在下面的方框内填上合适的数字。

$$\begin{array}{rccc}
 & & 6 & \square \\
\times & & \square & \square \\
\hline
 & & \square & \square \\
 & \square & \square & \\
\hline
 & \square & \square & 6
\end{array}$$

分析 一个因数十位上是 6,如果它与比 1 大的数相乘,所得的积肯定是三位数,

但两次乘得的积都是两位数，那另一个因数的十位和个位都只能填 1。

$$\begin{array}{r} 6\ 6 \\ \times\quad 1\ 1 \\ \hline 6\ 6 \\ 6\ 6 \\ \hline 7\ 2\ 6 \end{array}$$

(3) 下边算式中，A 表示同一个数字，在各个□中填入适当的数字，使算式完整。那么两个乘数的差（大数减小数）是多少？

$$\begin{array}{r} \square\ A \\ \times\quad \square\square \\ \hline \square\square\square \\ \square\square\square \\ \hline 1\ A\ A\ 1 \end{array}$$

分析　只有 $1\times1,3\times7,9\times9$ 的个位是 1，所以 A 可能为 1，3，7 或 9，而且 $\overline{1AA1}$ 可分解成 11 与 1 个一位数和 1 个两位数的乘积。分别检验 1111，1331，1771，1991，只有 1771 满足 $1771=11\times7\times23$，可知原式是 $77\times23=1771$。所以两个乘数的差是 $77-23=54$。

例 5　(1) 在下面方框内填上合适的数字。

$$\begin{array}{rr} & \square\ 6 \\ \cline{2-2} \square\square\big) & 1\ \square\ 2 \\ & 1\ \square \\ \cline{2-2} & \square\ 2 \\ & \square\square \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

分析　由商的十位与除数的乘积的最高位是 1，可推知除数的十位是 1，商的十位是 1。由商的个位 6，可推知除数的个位是 2 或 7。如果是 7，除数 17 乘 6 是三位数，不符合条件；如果是 2，恰好成立。

$$\begin{array}{rr} & \boxed{1}\ 6 \\ \cline{2-2} \boxed{1}\boxed{2}\big) & 1\ \boxed{9}\ 2 \\ & 1\ \boxed{2} \\ \cline{2-2} & \boxed{7}\ 2 \\ & \boxed{7}\boxed{2} \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

(2) 在下面方框内填上合适的数字，并写出所有答案。

$$\begin{array}{rr} & 2\ \square \\ \cline{2-2} \square\square\big) & 7\ \square\ 2 \\ & 6\ \square \\ \cline{2-2} & 1\ \square\ 2 \\ & 1\ \square\ 2 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

分析　通过对算式中已经给出的数和整个算式的关系进行观察，可以逐步得出答

案。首先,商的第一位为 2,而除式的第一个数为以 6 开头的两位数,可知除数的十位上一定是 3。再决定其个位的数值,因为 2 倍的除数小于 70,故个位只能是从 0 到 4 的 5 个数中的某一个。再观察除式可知除数的某个倍数为形如 1□2 的形式。所以经过逐个验证,即可发现只有 3 和 4 这两个数才能满足题目设置的要求。得出的算式分别为

```
       2 4              2 3
33 ) 7 9 2      34 ) 7 8 2
     6 6             6 8
     -----           -----
     1 3 2           1 0 2
     1 3 2           1 0 2
     -----           -----
         0               0
```

(3) 在下面方框内填上适当的数,使所得的算式成立。

```
       □ □ 2
□ ) □ □ □ □
      □
    -------
      1 □
        □
      -----
        □ □
        □ □
        ---
          0
```

分析 首先观察第四行的数字 1,这是上面的一个两位数减去一个一位数的结果,所以上面只能是 10 - 9 =1。根据第三行的数是 9 可以判断出这个算式的除数只能是 3 或 9,再通过最右边一列的商是 2,2 乘除数是一个两位数,所以除数只能是 9。此时不难判断商是 112,被除数是 1008。得出相应的算式如下图所示:

```
     1 1 2
9 ) 1 0 0 8
     9
    -------
     1 0
       9
      -----
       1 8
       1 8
       ---
         0
```

秘籍 3 利用整除特点分析

例 6 (1) 在算式 2 × □□□ = □□□的六个方框内,分别填入 4,5,6,7,8,9 这六个数字,使算式成立,那么这个乘积是________。

分析 由于积是一个三位数,所以第二个因数的百位只能是 4,那么第二个因数最小是 456,最大是 498,最小和最大的 2 倍都是 900 多,所以积的百位是 9;积的个位是偶数,只能是 6 或 8,如果是 8,第二个因数的个位只能是 9 或 4,而 9 和 4 都已经用过一次,所以积的个位是 6,那么第二个因数的个位是 3 或 8,而题目没有数字 3,那么第二个因数的个位是 8,所以 2 ×478 =956。

(2) 在下面的算式中，同一个字母代表相同数字，不同的字母代表不同的数字。$\overline{AA}\times\overline{BC}=\overline{CAC}$，写出这个算式________。

分析　$\overline{AA}$是 11 的倍数，所以$\overline{CAC}$也是 11 的倍数，11 的倍数的特点：奇数位的数字之和与偶数位的数字之和的差是 11 的倍数，从而 $C+C-A=0$ 或者 $C+C-A=11$；观察算式的个位 $A\times C=C$，如果 $C+C-A=0$，可得 $C=1, A=2$；$C=2, A=4$；$C=3, A=6$；$C=4, A=8$；都不满足 $A\times C=C$；所以 $C+C-A=11$，A 是奇数，$A=1$，$C=6$，满足 $A\times C=C$，所以 $A=1, C=6$，算式为 $11\times56=616$。

秘籍总结

弃九法：加数的数字之和每进一次位减少 9。

乘除法算式中要先看高位和个位的数字，高位能确定位数。

秘籍修炼11

练 1　(1) 当乘积最大时，方框内所填的 4 个数字之和是多少？

$$\begin{array}{r}\square\square\\ \times\quad 5\\ \hline \square\square\end{array}$$

(2) 把 1 ~6 这 6 个数字填入算式中，使得算式的值达到最大：$\square\times\square\square+\square\times\square\square$。

练 2　(1) 如下图所示，算式中不同的汉字表示不同的数字，相同的汉字表示相同的数字。求使算式成立的汉字所表示的数字。

$$\begin{array}{r}学\\ 数\ 学\\ 爱\ 数\ 学\\ +\ 喜\ 爱\ 数\ 学\\ \hline 2\ 0\ 0\ 8\end{array}$$

(2) 在下面的竖式中，相同字母代表相同数字，不同字母代表不同数字，则四位数 $\overline{tavs}=$________。

$$\begin{array}{r}s\ t\ v\ a\\ +\ v\ t\ s\ t\\ \hline t\ t\ v\ t\ t\end{array}$$

练 3　(1) 请补全下图所示的残缺算式。

$$\begin{array}{r}\square\ 7\ \square\ 6\ \square\\ \times\qquad\quad 7\\ \hline 3\ \square\ 2\ 9\ \square\ 6\end{array}$$

(2) 请补全下图所示的残缺算式。

$$\begin{array}{r} \square\,2\,\square \\ \times\quad \square\,7 \\ \hline \square\square\square\square \\ \square\,3\,0\,\square \\ \hline \square\,5\,\square\square\,5 \end{array}$$

练 4 (1) 请补全下图所示的残缺算式。

$$\begin{array}{r} \square\square \\ 6\square\square\overline{)\square\square\square\,1} \\ \square\square\,7 \\ \hline \square\square\square\square \\ \square\square\,6\,1 \\ \hline 0 \end{array}$$

(2) 在下图所示除法竖式的每个方框内，填入适当的数字，使算式成立。那么算式中的被除数是多少？

$$\begin{array}{r} \square\,2 \\ \square\square\overline{)\square\square\square\square} \\ 2\,7\,3 \\ \hline \square\square\square \\ \square\square\square \\ \hline 7 \end{array}$$

练 5 将数字 1 ~ 9 分别填入下图竖式的方格内使算式成立(每个数字恰好使用一次)，那么加数中的四位数最小是多少？

$$\begin{array}{r} 1\,\square\square\square \\ \square\square\square \\ +\quad \square\square\square \\ \hline 2\,0\,0\,8 \end{array}$$

练 6 (1) 在$\overline{速算}\times\overline{巧算}=\overline{好好好}$的乘法算式中，不同的汉字表示不同的数字，相同的汉字表示相同的数字。那么“速 + 巧 + 算 + 好”之和等于多少？

(2) 下图是一个正确的加法算式，其中相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字。已知$\overline{BAD}$不是 3 的倍数，$\overline{GOOD}$不是 8 的倍数，那么$\overline{ABGD}$代表的四位数是多少？

$$\begin{array}{r} B\ A\ D \\ +\quad B\ A\ D \\ \hline G\ O\ O\ D \end{array}$$

第12讲　位值原理与进制

秘籍导航

理解位值原理的意义,并利用位值原理进行计算,熟练掌握进位制之间的转化。

秘籍攻略

任何进位制下都有对应的位值原理。

秘籍 1　位值原理

例 1 (1) $365 = \_\_\_\_ \times 100 + \_\_\_\_ \times 10 + \_\_\_\_ \times 1$

(2) 用数字 1,2,3 各一个可以组成三位数,问所有这样的三位数之和是多少?

分析 (1)3,6,5

(2)$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} =$

$222 \times (a + b + c)$

所以 $123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 = 222 \times (1 + 2 + 3) = 1332$。

秘籍 2　*N* 进制化十进制

例 2 (1) 二进制数 1101 等于十进制的多少?

$(1101)_2 = (\quad\quad)_{10}$

分析 十进制下个位每个代表 1,十位每个代表 10,百位每个代表 100。

那么二进制下,“个位”每个代表 1,“十位”每个代表 2,“百位”每个代表 $2^2 = 4$。

所以$(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 13$。

(2) 八进制数 463 等于十进制的多少?

$(463)_8 = (\quad\quad)_{10}$

分析 十进制下个位每个代表 1,十位每个代表 10,百位每个代表 100。

那么八进制下,“个位”每个代表 1,“十位”每个代表 8,“百位”每个代表 $8^2 = 64$。

$(463)_8 = 4 \times 8^2 + 6 \times 8 + 3 \times 1 = 307$

(3) 七进制数 245 等于十进制的多少?

$(245)_7 = (\quad\quad)_{10}$

分析 十进制下个位每个代表 1,十位每个代表 10,百位每个代表 100。

那么七进制下,“个位”每个代表 1,“十位”每个代表 7,“百位”每个代表 $7^2 = 49$。

$(245)_7 = 2 \times 7^2 + 4 \times 7 + 5 \times 1 = 131$

例 3 $(643721)_8$ 表示一个八进制数,请问这个数被 7 除的余数是多少?

分析 在八进制中被 7 除的性质与在 10 进制中被 9 除的性质相同，所以都是使用数字和的方法，$(6+4+3+7+2+1)\div 7=3\cdots\cdots 2$。

秘籍 3 十进制化 *N* 进制

例 4 (1) 十进制数 34 等于二进制的多少？

$34=(\quad\quad)_2$

分析 二进制下“个位”满 2 就向“十位”进位，“十位”满 2 后就向“百位”进位，所以 34 除以 2 得到的余数就是二进制后的“个位”，得到的商继续除以 2 向前进位，得到的余数就是二进制后的“十位”，以此类推。

$$\begin{array}{r|l l}
2 & 34 & \\
2 & 17 & \text{-----}\ 0 \\
2 & 8 & \text{-----}\ 1 \\
2 & 4 & \text{-----}\ 0 \\
2 & 2 & \text{-----}\ 0 \\
2 & 1 & \text{-----}\ 0 \\
 & 0 & \text{-----}\ 1
\end{array}\uparrow$$

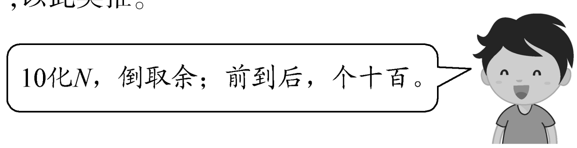
所以倒取余数，可以得到 $34=(100010)_2$。

(2) 十进制数 865 等于五进制的多少？

$865=(\quad\quad)_5$

分析 五进制下“个位”满 5 就向“十位”进位，“十位”满 5 后就向“百位”进位，所以 865 除以 5 得到的余数就是五进制后的“个位”，得到的商继续除以 5 向前进位，得到的余数就是五进制后的“十位”，以此类推。

$$\begin{array}{r|l l}
5 & 865 & \\
5 & 173 & \text{-----}\ 0 \\
5 & 34 & \text{-----}\ 3 \\
5 & 6 & \text{-----}\ 4 \\
5 & 1 & \text{-----}\ 1 \\
 & 0 & \text{-----}\ 1
\end{array}\uparrow$$



所以倒取余数，可以得到 $865=(11430)_5$。

秘籍 4 进制计算

例 5 (1) $(1235)_7+(4251)_7=(\quad\quad)_7$

分析 列加法竖式，进位过程中逢 7 进 1 即可。

$$\begin{array}{r}
1\ 2\ 3\ 5 \\
+\ 4\ 2_{1}5\ 1 \\
\hline
5\ 5\ 1\ 6
\end{array}$$

“个位”为 6，“十位”为 8，其中 7 变为 1 进到“百位”，“十位”变为 1，以此类推，得到

答案$(5516)_7$。

(2) $(1744)_8-(1247)_8=(\qquad)_8$

分析 列减法竖式,借位过程中借 1 当 8 即可。

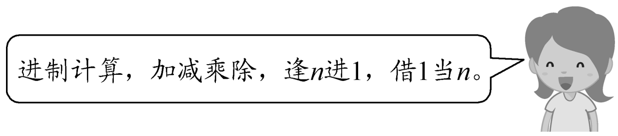
$$\begin{array}{r} 1\ 7\ 4\ 4 \\ -\ \ 1\ 2\ 4\ 7 \\ \hline 4\ 7\ 5 \end{array}$$

计算个位,4 减 7 不够减,向“十位”借 1 当作 8,然后进行计算 $4+8-7=5$。以此类推,得到答案$(475)_8$。

例 6 (1) $(1101)_2\times(101)_2=(\qquad)_2$

分析 列乘法竖式,数位相加过程中逢 2 进 1 即可。

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1 \\ \times\quad\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1\quad\ \ \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$



得到答案$(1000001)_2$。

(2) $(100001)_2\div(1011)_2=(\qquad)_2$

分析 列除法竖式,数位相减过程中借 1 当 n 即可。

得到答案$(11)_2$

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 1011\,\big)\overline{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1} \\ 1\ 0\ 1\ 1\quad \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

秘籍总结

N 化 10,看数位,个十百,$1,n,n^2$。

10 化 N,看余数,前到后,个十百。

进制计算,加减乘除,逢 n 进 1,借 1 当 n。

$$N\text{进制}\underset{\text{除以 }n\text{ 倒取余数}}{\overset{\text{位值原理}}{\rightleftharpoons}}\text{十进制}$$

秘籍修炼12

练 1 填空(1)$20220=2\times$____$+2\times$____$+2\times$____

(2)$\overline{abcd}=a\times$____$+b\times$____$+c\times$____$+d\times$____

(3)$\overline{9a8b7}=a\times$____$+b\times$____$+90807$

练 2　七进制数 364 换算成十进制是多少？

$(364)_7=(\quad\quad)_{10}$

练 3　六进制数 542 换算成十进制是多少？

$(542)_6=(\quad\quad)_{10}$

练 4　十进制数 568 换算成八进制是多少？

$568=(\quad\quad)_8$

练 5　计算（1）$(178)_9+(8803)_9=(\quad\quad)_9$

（2）$(101101)_2-(10111)_2=(\quad\quad)_2$

练 6　计算（1）$(101)_2\times(1011)_2-(11011)_2=(\quad\quad)_2$

（2）$(1011010)_2\div(110)_2=(\quad\quad)_2$

第13讲　综合练习

秘籍导航

在复习前面几讲内容的同时，进行综合题目的训练，提升解决综合问题的能力。

秘籍攻略

秘籍 1　凑整法

例 1　（1）计算 $234+432-4\times8+330\div5$

分析　我们先算出 $4\times8=32$，$330\div5=66$，可以运用加法交换律和结合律，可使算式中 $432-32$，$234+66$ 凑为整百的数，从而使计算简便迅速。我们把这种凑整的方法叫作分组凑整法。

原式 $=234+432-32+66$

$=(234+66)+(432-32)$

$=300+400$

$=700$

（2）计算 $998+1413+9989$

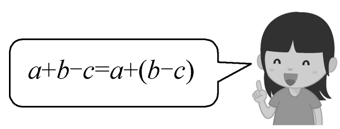
分析　计算观察算式发现 $998+2=1000$，$9989+11=10000$，$11+2=13$，$1413=1400+13$，然后再分组凑整。

原式 $=998+2+1400+11+9989$

$=(998+2)+(11+9989)+1400$

$=1000+10000+1400$

$=12400$



（3）计算 $7+77+777+7777+77777$

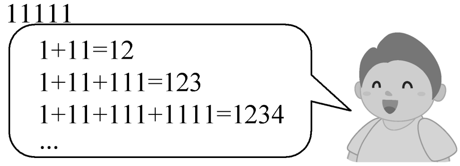
分析　观察算式 $7=7\times1$，$77=7\times11$，$777=7\times111$，$7777=7\times1111$，$77777=7\times11111$，这样可以提取 7 留下 $1+11+111+1111+11111=12345$，然后再与 7 相乘。

原式 $=7\times1+7\times11+7\times111+7\times1111+7\times11111$

$=7\times(1+11+111+1111+11111)$

$=7\times12345$

$=86415$



例 2　计算 $(1234+2341+3412+4123)\div(1+2+3+4)$

分析　观察算式发现 1234，2341，3412，4123 是四个一样的数字轮流循环，因为 $1234=1\times1000+2\times100+3\times10+4\times1$，$2341=2\times1000+3\times100+4\times10+1\times1$，$3412=3\times1000+4\times100+1\times10+2\times1$，$4123=4\times1000+1\times100+2\times10+3\times1$，

所以不难发现有 $1234+2341+3412+4123=(1+2+3+4)\times1000+(1+2+3+4)\times100+(1+2+3+4)\times10+(1+2+3+4)\times1$，因此本题可用提取公因数的方法进行巧算。

原式 $=[(1+2+3+4)\times1000+(1+2+3+4)\times100+(1+2+3+4)\times10+(1+2+3+4)\times1]\div(1+2+3+4)$

$=(1+2+3+4)\times(1000+100+10+1)\div(1+2+3+4)$

$=10\times1111\div10$

$=1111$

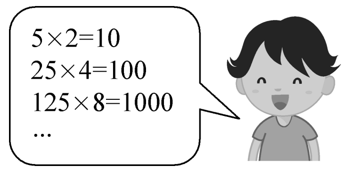
例 3 (1) 计算 $5\times64\times25\times125\times97$

分析 用分组法计算比较简便，把 64 分解成 $2\times4\times8$，再分别与 5，25，125 结合。

原式 $=(5\times2)\times(4\times25)\times(8\times125)\times97$

$=10\times100\times1000\times97$

$=97000000$



(2) 计算 $9999\times7778+6666\times3333$

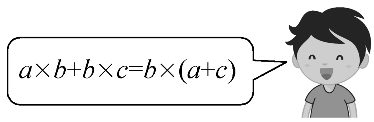
分析 利用积不变进行变形，$6666\times3333=2222\times3\times3333=2222\times9999$，再运用提取公因数的方法，达到凑整巧算的目的。

原式 $=9999\times7778+2222\times9999$

$=9999\times(7778+2222)$

$=9999\times10000$

$=99990000$



秘籍 2 公式类的综合

例 4 (1) 计算 $30^2-29^2+28^2-27^2+26^2-25^2+\cdots+2^2-1^2$

分析 30^2-29^2 是平方差，可以用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 公式计算。

原式 $=(30^2-29^2)+(28^2-27^2)+\cdots+(2^2-1^2)$

$=(30+29)\times(30-29)+(28+27)\times(28-27)+\cdots+(2+1)\times(2-1)$

$=30+29+28+27+\cdots+2+1$

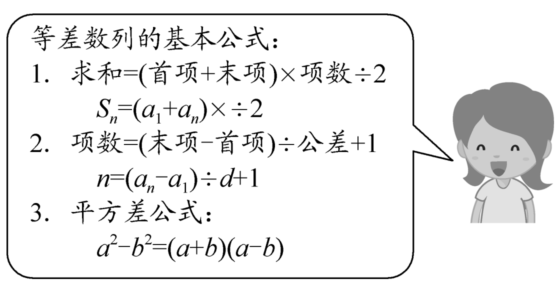
$=(30+1)\times30\div2$

$=31\times15$

$=465$

(2) 计算 $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+99^2-100^2+101^2$

分析 该题与上一题的区别是 1^2-2^2 减不开，仔细观察 101^2-100^2 可以用平方差公式，所以用加法结合律重新组合一下即可。



原式 $=(101^2-100^2)+(99^2-98^2)+(97^2-96^2)+\cdots+(3^2-2^2)+1^2$

$=(101+100)\times(101-100)+(99+98)\times(99-98)+\cdots+(3+2)\times(3-2)+1$

$=101+100+99+98+\cdots+3+2+1$

$=(1+101)\times101\div2$

$=51\times101$

$=5151$

秘籍3　高斯记号

例5　(1) 用$\{x\}$表示数 x 的小数部分，$[x]$表示 x 的整数部分，如$\{2.6\}=0.6$，$[2.6]=2$。

若 $a+[b]=13.4$，$\{a\}+b=7.8$，则 $a=$(　　)，$b=$(　　)。

分析　观察算式发现第一个式子可知 a 的小数部分是0.4，所以$\{a\}=0.4$，所以 $b=7.8-0.4=7.4$，$[b]=7$，所以 $a=13.4-7=6.4$。

所以 $a=6.4$，$b=7.4$。

(2) 用$[x]$表示不超过 x 的最大整数，并令$\{x\}=x-[x]$。

若 x,y,z 满足下列关系：$x+\{y\}=2016$，$[y]+\{z\}=16.6$，$z+\{x\}=4$，求 $x+y+z=$(　　)。

分析　观察算式$[y]+\{z\}=16.6$发现$[y]$是整数，$\{z\}=0.6$，$[y]=16$，因为 $z+\{x\}=4$，即$[z]+\{z\}+\{x\}=4$，所以$[z]=3$，即 $z=3.6$，$\{z\}+\{x\}=1$，$\{x\}=0.4$。因为 $x+\{y\}=2016$，即$[x]+\{x\}+\{y\}=2016$ 所以$[x]=2015$，$x=2015.4$，$\{x\}+\{y\}=1$，即$\{y\}=0.6$，所以 $y=16.6$。

所以 $x+y+z=2015.4+16.6+3.6=2035.6$。

秘籍4　数列与数表、数字谜

例6　(1) 有一列数1，2，4，7，11，16，22，…，问第1000个数是多少？

分析　观察数列不难发现：

$1+1=2$

$1+1+2=4$

$1+1+2+3=7$

$1+1+2+3+4=11$

…

于是第1000个数为 $1+1+2+3+4+\cdots+999=1+(1+999)\times999\div2=1+499500=499501$。

(2) 将1～1001各数如下图的格式排列，用一个长方形框入9个数，要使这9个数的和等于：①1986；②2529；③1989 能否办得到？如果办不到，简单说明理由；如果办得到，写出长方形框里的最大的数和最小的数。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
…	…	…	…	…	…	…
995	996	997	998	999	1000	1001

分析 如上图所示，观察框里的9个数，我们不难发现，中间的数18是框里9个数的平均数，所以长方形框里所有数的和为18×9，那么长方形框里的9个数的和一定是9的倍数。

① 因为$1986\div9=220\cdots\cdots6$，所以不行。

② 因为$2529\div9=281$，但$281\div7=40\cdots\cdots1$，即虽然2529能被9整除，但框中间的数281处在表最左边的一列，不可能作为长方形框里中间的数字，所以不行。

③ 因为$1989\div9=221$，$221\div7=31\cdots\cdots4$，所以其中最大的数是$221+(25-18)+1=229$；最小的数是$221-(18-11)-1=213$。

(3) 下面是一个六位数乘一个一位数的算式，不同的汉字表示不同的数，相同的汉字表示相同的数，其中的六位数是(　　)。

$$\begin{array}{r} 学\ 而\ 思\ 杯\ 竞\ 赛 \\ \times\qquad\qquad\quad 赛 \\ \hline 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \end{array}$$

分析 观察题目发现个位数字是9，所以“赛”字只能是3或7。如果是3，那么“竞”字是除3外的任何数字都不合理，所以“赛”字只能是7。“竞×赛”的个位数字是$9-4=5$，所以“竞”字是5。以此类推，判断出“杯”、“思”、“而”、“学”分别是8，2，4，1，所以这个六位数是142857。

(4) 将0，1，2，3，4，5，6这七个数字填在方框内，每个方框填一个数字，每个数字恰好出现一次，组成一个整数算式。

$\square\times\square=\square\square=\square\square\div\square$

分析 要求用七个数字组成五个数分别填在方框内，这五个数有三个数是一位数，有两个数是两位数，显然，两个因数和除数是一位数，我们先求这一位数。0和1不能做因数，更不能做除数。由于$2\times6=12$（2将出现两次），$2\times5=10$（经试验不行），$2\times4=8$（7个数中没有8），$2\times3=6$（6不能成为商）均不行。因此0、1和2只能用来组成两位数，它可以组成12和21等，经试验，21不能填在方框里，12可以，于是得到$3\times4=12=60\div5$。

原式$=\boxed{3}\times\boxed{4}=\boxed{1}\boxed{2}=\boxed{6}\boxed{0}\div\boxed{5}$

秘籍总结

遇到数列的计算想等差，遇到周期想规律。

遇到平方想平方差公式，法则要牢记。

遇到复杂问题需多个知识点来处理。

秘籍修炼13

练 1 计算(1)$8+98+998+9998+99998+999998$

(2)$5+55+555+\cdots+55555555$

(3)$(1234567+2345671+3456712+4567123+5671234+6712345+7123456)\div 7$

练 2 计算(1)$375\times 56\times 13\times 11$

(2)$125\times 25\times 0.128\times 39$

练 3 计算(1)$2008\times 2006+2007\times 2005-2007\times 2006-2008\times 2005$

(2)$2.5\times 32\div 14+36\div 21\times 2.5$

练 4 计算(1)$71^2-67^2+63^2-59^2+55^2-51^2+\cdots+31^2-27^2$

(2)$2008^2-2007^2+2006^2-2005^2+2004^2-2003^2+2002^2-2001^2$

练 5 用$\{x\}$表示数x的小数部分,$[x]$表示x的整数部分,例如,$\{3.4\}=0.4$,$[3.4]=3$。若$a+[b]=15.6$,$\{a\}+b=8.9$,则$a=(\quad)$,$b=(\quad)$

练 6 自然数1,2,3,…排成一行分组,规定第n组含有n个自然数,即(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),(11,12,…)。

① 第十组的第一个数是几?

② 试求第十组中所有自然数的和。

练 7 下面算式中,不同的汉字表示不同的数,相同的汉字表示相同的数,求使算式成立的汉字所表示的数。

$$\begin{array}{r} 学 \\ 数\ 学 \\ 爱\ 数\ 学 \\ +\ 我\ 爱\ 数\ 学 \\ \hline 1\ 9\ 9\ 2 \end{array}$$

我=(　　)
爱=(　　)
数=(　　)
学=(　　)

(数+学+我)×爱=(　　)

答案与提示

第1讲　特殊的乘法

秘籍修炼1

练1　(1) $75\times33=2475$　$67\times67=4489$

$84\times34=2856$　$56\times89=4984$

(2) $62\times68=4216$　$75\times75=5625$

$81\times89=7209$　$73\times77=5621$

练2　$26\times86=2236$　$65\times45=2925$

$52\times52=2704$　$37\times77=2849$

练3　$77\times99=7623$　$99\times52=5148$

$888\times999=887112$

$1143\times9999=11428857$

练4　$852\times1001=852852$

$2014\times10001=20142014$

$213\times101=21513$

$1001\times1001=1002001$

练5　原式 $=1234\times5678\times10001-1234\times10001\times5678$

$=0$

练6　原式 $=3721\times1357\times100010001-3721\times100010001\times1357$

$=0$

第2讲　等差数列进阶

秘籍修炼2

练1　(1)原式 $=(1+78)\times78\div2=3081$

(2)原式 $=(1+201)\times101\div2=101^2=10201$

(3)原式 $=(2+200)\times100\div2=10100$

(4)原式 $=(2+210)\times[(210-2)\div4+1]\div2=5618$

练2　(1)原式 $=4000-(1+78)\times78\div2=919$

(2)原式 $=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(110-109)=1+1+1+\cdots+1=1\times[(110-2)\div2+1]$

$=55$

练3　(1)原式 $=(204-198)+(192-186)+\cdots+(24-18)+(12-6)$

$=6+6+6+\cdots+6$

$=6\times[(204-6)\div6+1]\div2$

$=102$

(2)原式 $=(560-557)+(554-551)+\cdots+(500-497)$

$=3+3+3+\cdots+3$

$=3\times11$

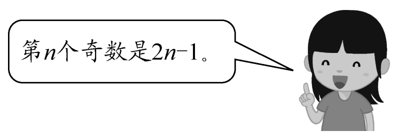
$=33$

练4　(1)算式中第一个奇数是1,第二个奇数是3,第三个奇数是5,……,第100个奇数是 $2\times100-1=199$。

原式 $=(1+199)\times100\div2$

$=200\times50$

$=10000$



(2)原式 $=3\times[(1+10)\times10\div2]-(11+20)\times10\div2$

$=3\times55-31\times5$

$=165-155$

$=10$

练5　(1)该题是求等差数列的第30项。根据项数公式,首项是20,公差是2,末项是 $20+(30-1)\times2=78$。

(2)先求出共有多少排,即看作是求等差数列的项数:$(73-15)\div2+1=30$(排),

再求出共有多少个座位,

$(15+73)\times30\div2=1320$(个)。

练 6 (1)1～100 内能被 3 整除的数是 3,6,9,12,…,99,它们的和是

$3+6+9+\cdots+99$

$=(3+99)\times[(99-3)\div3+1]\div2$

$=102\times33\div2$

$=1683$

1～100 内能被 5 整除的数是 5,10,15,20,…,100,它们的和是

$5+10+15+\cdots+100$

$=(5+100)\times[(100-5)\div5+1]\div2$

$=105\times20\div2$

$=1050$

能同时被 3 和 5 整除的数有 15,30,45,60,75,90,它们的和是

$15+30+45+\cdots+90$

$=(15+90)\times6\div2$

$=105\times6\div2$

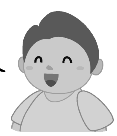
$=105\times3$

$=315$

能被 3 或 5 整除的数的和是

$1683+1050-315=2418$

(2)观察题目发现,第 1 项是 2,第 2 项是 $2+4=6$,第 3 项是 $2+4+6=12$,第 4 项是 $2+4+6+8=20$,……由此可见,它是由从 2 起的连续偶数的和组成的数列,因而第 10 项就是 $2+4+6+\cdots+20=(2+20)\times10\div2=110$。



第 3 讲　提取公因数

秘籍修炼 3

练 1 利用乘法分配律的反向运用,直接提取公因数 365。

原式 $=365\times(23+77)$

$=365\times100$

$=36500$

练 2 把算式补充完整,$63\times101-63\times1$,就很容易看出两个乘法算式中有相同的因数 63。

原式 $=63\times(101-1)$

$=63\times100$

$=6300$

练 3 根据"一个因数乘几,另一个因数除以几,积不变"的规律把 2570×37 转化成 257×370,两部分就有了相同的因数 257。

原式 $=630\times257+257\times370$

$=257\times(630+370)$

$=257000$

练 4 题目中没有公因数,但是有"补数"68 和 32,可以去凑公因数。

原式 $=361\times68+(361+125)\times32$

$=361\times68+361\times32+125\times32$

$=361\times(68+32)+125\times32$

$=36100+125\times4\times8$

$=36100+4000$

$=40100$

练 5 (1)直接提取公因数 47,二次提取公因数 36。

原式 $=47\times(17+19)+36\times(19+34)$

$=47\times36+36\times53$

$=36\times(47+53)$

$=36\times100$

$=3600$

(2)算式中无公因数但有局部的公因数 7816。

原式 $=7816\times(145+169)+314\times2184$

$=7816\times314+314\times2184$

$=314\times(7816+2184)$

$=314\times10000$

$=3140000$

练 6 综合题目,先提取公因数,再采用平方差公式计算。

原式 $=345\times(343\times347-342\times348)$

$=345\times[(345-2)\times(345+2)$

$-(345-3)\times(345+3)]$
$=345\times[(345^2-2^2)-(345^2-3^2)]$
$=345\times(9-4)$
$=345\times5$
$=1725$

第4讲　从简单情况入手

秘籍修炼4

练1　(1)12345654321
(2)123456787654321
(3)$10\times10=100$
(4)$30\times30=900$
(5)$111111\times999999=111110888889$
(6)$11111111\times99999999=1111111088888889$

练2　(1)$3333\times3334=11112222$
(2)$666666\times666667=444444222222$

练3　(1)$37\times(21)=777$
(2)$37\times(27)=999$
(3)$8547\times(39)=333333$
(4)$12345679\times(45)=555555555$

练4　原式$=1234567$

练5　(1)原式$=2222\times3\times3333$
$=2222\times9999$
$=22217778$
(2)原式$=11111\times3\times33333$
$=11111\times99999$
$=1111088889$
(3)$999999\times999999=999998000001$
(4)$678\times999=677322$
(5)$6789\times9999=67883211$
(6)$13432\times99999=1343186568$

练6　从简单情况入手,如果只有1克、2克,可以卖出$1+2=3$(种);
有1克、2克、4克,可以卖出$1+2+4=7$(种);
有1克、2克、4克、8克,可以卖出$1+2+4+8=15$(种);
以此类推,
可以卖出$1+2+4+8+16+32=63$(种)。

第5讲　四则混合运算

秘籍修炼5

练1　(1)$2500\div25\div4=25$
(2)$510\div15\div17=510\div17\div15=30\div15=2$
(3)$630\div(9\times5)=630\div9\div5=70\div5=14$
(4)$756\div(196\div7)=756\div28=27$

练2　(1)$871\times364\div182=871\times(364\div182)=871\times2=1742$
(2)$125\times91\div25=125\div25\times91=5\times91=455$
(3)$650000\div169\times13=650000\div(169\div13)=650000\div13=50000$
(4)$204\times312\div197\div312\times197\div204$
$=(204\div204)\times(312\div312)\times(197\div197)=1$

练3　(1)原式$=37+49+700\div(25\times4)$
$=37+49+700\div100$
$=37+49+7$
$=93$
(2)原式$=(200+312+188)\div7$
$=700\div7$
$=100$
(3)原式$=(3895-1058-828)\div41$
$=2009\div41$
$=49$
(4)原式$=(2280-648+448)\div13\div16$
$=2080\div13\div16$
$=160\div16$
$=10$

练4　(1)原式$=2730\times(71+31-2)$
$=2730\times100$
$=273000$
(2)原式$=410\times(475+525)\div100$
$=410\times1000\div100$
$=4100$

练 5 （1）原式 $=144\div[(270-30)\div10\times6]$
$=144\div[240\div10\times6]$
$=144\div[24\times6]$
$=144\div144$
$=1$

（2）原式 $=(3971+1+2028)\times215\div(625\times8)$
$=6000\times215\div5000$
$=258$

（3）原式 $=8\times[138-123]\div12$
$=8\times15\div12$
$=10$

（4）原式 $=6\times55+6\times45$
$=6\times(55+45)$
$=6\times100$
$=600$

练 6 （1）原式 $=37035\div5=7407$

（2）原式 $=[(100-99)+(98-97)+(96-95)+\cdots+(4-3)+(2-1)]\div5$
$=(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{50个“1”})\div5$
$=50\div5$
$=10$

第 6 讲　公式类计算

秘籍修炼 6

练 1 （1）原式 $=(1+20)\times20\div2=210$

（2）原式 $=(1+30)\times30\div2=465$

（3）原式 $=2(1+10)\times10\div2=110$

（4）原式 $=(1+20)\times20\div2-(1+9)\times9\div2=165$

练 2 （1）原式 $=20\times20=400$

（2）原式 $=45\times45=2025$

（3）原式 $=2\times(1+2+3+\cdots+9+\cdots+3+2+1)=2\times9\times9=162$

（4）原式 $=2\times(1+2+3+\cdots+11+10+\cdots+3+2+1)=2\times11\times11=242$

（5）原式 $=(1+2+3+\cdots+50+\cdots+3+2+1)-(1+2+3\cdots+20+\cdots+3+2+1)-20$
$=50^2-20^2-20$
$=2500-400-20$
$=2080$

练 3 （1）原式 $=8\times8=64$

（2）原式 $=15\times15=225$

（3）原式 $=15\times15-4\times4=209$

（4）原式 $=12\times12-5\times5=119$

练 4 （1）$33^2-32^2=(33+32)\times(33-32)=65$

$69^2-67^2=(69+67)\times(69-67)=272$

$2009^2-2008^2=(2009+2008)\times(2009-2008)=4017$

（2）$31\times29=(30+1)\times(30-1)=30^2-1^2=899$

$19\times21=(20-1)\times(20+1)=20^2-1=399$

$302\times298=(300+2)\times(300-2)=300^2-2^2=89996$

练 5 原式 $=(10^2-9^2)+(8^2-7^2)+(6^2-5^2)+\cdots+(2^2-1)$
$=(10-9)\times(10+9)+(8-7)\times(8+7)+(6-5)\times(6+5)+\cdots+(2-1)\times(2+1)$
$=10+9+8+7+6+5+\cdots+2+1$
$=(1+10)\times10\div2$
$=55$

练 6 　$(a+b)(a-b)=1\times27=3\times9$

①$a+b=27$　$a-b=1$

$a=(27+1)\div2=14$　$b=27-14=13$

②$a+b=9$　$a-b=3$

$a=(9+3)\div2=6$　$b=9-6=3$

第 7 讲　小数加减法

秘籍修炼 7

练 1 （1）原式 $=(3.47+1.53)+(4.58+2.42)$
$=5+7$
$=12$

(2)原式 $=(0.7+2.3)+(0.5+1.5)+(0.9+1.1)+(1.3+1.7)+(1.9+2.1)$
$=3+2+2+3+4$
$=14$

练 2 (1)原式 $=8.53-0.53-(1.48+0.52)$
$=8-2$
$=6$

(2)原式 $=40-[(9.1+9.9)+(9.2+0.8)+(9.3+0.7)]$
$=40-(19+10+10)$
$=1$

练 3 (1)原式 $=(1.348-0.348)+(2.234-0.234)$
$=1+2$
$=3$

(2)原式 $=(2.64+1.36)+(4.51+1.49)-(2.16+1.84)$
$=4+6-4$
$=6$

练 4 (1)原式 $=(2.0-1.9)+(1.8-1.7)+(1.6-1.5)+\cdots+(0.4-0.3)+(0.2-0.1)$
$=0.1+0.1+0.1+\cdots+0.1$
$=1$

(2)原式 $=0.1+(0.2-0.3-0.4+0.5)+(0.6-0.7-0.8+0.9)+1.0$
$=0.1+0+0+1$
$=1.1$

练 5 (1)原式 $=0.1+0.1+0.7+29.9+399.9$
$=(0.1+29.9)+(0.1+399.9)+0.7$
$=30+400+0.7$
$=430.7$

(2)原式 $=(0.2-0.01)+(2-0.01)+(20-0.01)$
$=0.2+2+20-0.01-0.01-0.01$
$=22.2-0.03$
$=22.17$

练 6 (1)原式 $=(2-0.01)+(3-0.02)+(4-0.03)+(5-0.04)+(6-0.05)+0.2$
$=2+3+4+5+6+0.2-0.01-0.02-0.03-0.04-0.05$
$=20+0.2-0.15$
$=20.05$

(2)原式 $=(0.02-0.009)+(0.2-0.008)+(2-0.007)+(20-0.006)+(200-0.005)$
$=(0.02+0.2+2+20+200)-(0.009+0.008+0.007+0.006+0.005)$
$=222.22-0.035$
$=222.185$

第 8 讲　定义新运算

秘籍修炼 8

练 1 (1)要先算括号里面的加法,再算后面的除法。
$8★5=(8+5)\div5=2.6$
$5★8=(5+8)\div8=1.625$

(2)$11⊖12=5\times11\times12-(11+12)$
$=660-23=637$
$12⊖11=5\times12\times11-(12+11)$
$=660-23=637$

练 2 (1)$8\triangle7=3\times8+4\times7=24+28=52$
$52\triangle6=3\times52+4\times6=156+24$
$=180$
所以$(8\triangle7)\triangle6=180$
$7\triangle6=3\times7+4\times6=21+24=45$
$8\triangle45=3\times8+4\times45=24+180$
$=204$
$8\triangle(7\triangle6)=204$

(2)原式 $=70\oplus[2\times(18+4)-2\times(18\div4)]$
$=70\oplus[2\times22-2\times4.5]$
$=70\oplus35$
$=2\times(70+35)-2\times(70\div35)$
$=206$

练 3 (1)$26\div9=2\cdots\cdots8$,$26☆9=8$,又 $8\div4=2\cdots\cdots0$,故$(26☆9)☆4=8☆4=0$。

(2)新定义运算进行计算时如果遇到有括号的,要先计算小括号里的,再计算中括号里的。

$[(7◎3)\&15]\times[5◎(3\&7)]$
$=[3\&15]\times[5◎7]$
$=15\times5=75$

练 4 ① $<4,1,2,3>=4\times3+1\times2=14$

②$3\oplus10=3+(3+1)+(3+2)+(3+3)+\cdots+(3+10-1)$
$=3+4+5+6+\cdots+12$
$=(3+12)\times10\div2$
$=75$

练 5 由已知等式可知,“ * ”定义的是连加运算,第一个加数是“ * ”前边的数,后一个加数都比前一个加数多一位,但数字相同。“ * ”后边的数是加数的个数。

(1)$3*3=3+33+333=369$

(2)$4*5=4+44+444+4444+44444=49380$

练 6 (1)因为$4\otimes8=4\times2+8=16$,
$10\otimes6=10\times2+6=26$,
$6\otimes10=6\times2+10=22$,
$18\otimes14=18\times2+14=50$,
所以 $a\otimes b=a\times2+b$,
$7\otimes3=7\times2+3=14+3=17$。

(2)$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}\cdot\mathrm{D}=[(9+5)\div2-4]\times3=9$

第 9 讲　高斯记号

秘籍修炼 9

练 1 (1)0.98

(2)110

(3)0

(4)5

练 2 (1)原式 $=0.7-16+123$
$=0.7+123-16$
$=107.7$

(2)原式 $=0.8+0.98+0.998+0.9998+0.99998$
$=1\times5-(0.2+0.02+0.002+0.0002+0.00002)$
$=5-0.22222$
$=4.77778$

(3)原式 $=\{(125+1)\times100\div125\}$
$=\{125\times100\div125+100\div125\}$
$=\{100+100\div125\}$
$=0.8$

(4)原式 $=[13\times2\times24\div26\div3]$
$=8$

练 3 (1)原式 $=1+2+3+\cdots+100=5050$

(2)原式 $=(0.1+0.2+0.3+\cdots+0.9+0)\times3=13.5$

练 4 (1)$b=4$,$a=4\times25+5=105$

(2)$a\div b=q\cdots\cdots r$,$[a\div b]=q$,$\{a\div b\}=r\div b$,所以$[a\div10]=7$,$b=0.5\times10=5$,$a=7\times10+5=75$。

练 5 (1)3 的倍数的个数:$[100\div3]=33$
5 的倍数的个数:$[100\div5]=20$
15 的倍数的个数:$[100\div15]=6$
一共有 $33+20-6=47$ 个。

(2)$23\div5=4\cdots\cdots3$
原式 $=(0.2+0.4+0.6+0.8+0)\times4+0.2+0.4+0.6=9.2$

练 6 (1)由 $x=31.5$ 得 $[x]=31$,$\{x\}=0.5$,$[y]=47-31=16$,$\{y\}=0.8-0.5=0.3$,

$y=16+0.3=16.3$。

(2)由 $x+[y]=15.3$ 得 $\{x\}=0.3$，由 $\{x\}+y=7.8$ 得 $y=7.8-0.3=7.5$。

再根据 $x+[y]=15.3$ 得 $x=15.3-7=8.3$。

第10讲　数列与数表

秘籍修炼10

练1　(1)每一项等于前一项加4，所以括号里的数是 $23+4=27$。

(2)第一项、第三项、第五项、……是1，3，5，…的奇数，第二项、第四项、第六项、……是4，6，8，…的偶数，所以括号里的数应是7，10。

(3)第一个数是 $1^2=1$，第二个数是 $2^2=4$，第三个数是 $3^2=9$，……，第六个数是 $6^2=36$。

(4)第一个数是 $1\times2=2$，第二个数是 $2\times2=4$，第三个数是 $4\times2=8$，……，所以括号里的数是 $16\times2=32$。

练2　因为 $37-19=18$，$55-37=18$，所以，后一个数比前一个数大18。因此，$a=55+18=73$。

练3　$5+1234\times9=11111$，

$9+12345678\times9=111111111$。

练4　因为 $3\times2=6$，$12-2=10$，

$6\times2=12$，$10-2=8$，

$12\times2=24$，$8-2=6$，

$24\times2=48$，$6-2=4$，

所以，第六个算式的两个数分别是

$48\times2=96$，$4-2=2$，

即第六个算式是 $96+2$。

练5　①第一行的第一个数是1，第二个数是 $1+2=3$，第三个数是 $1+2+3=6$，第四个数是 $1+2+3+4=10$，……，第八个数是 $1+2+3+4+\cdots+8=36$。

②观察第一行第一个数是1，第二个数是 $1+2=3$，第三个数是 $1+2+3=6$，……，第二行第一个数是 $1+1=2$，第二个数是 $2+3=5$，第三个数是 $2+3+4=9$，第四个数是 $2+3+4+5=14$，……，第三行第一个数是 $1+1+2=4$，第二个数是 $4+4=8$，第三个数是 $4+4+5=13$，……，所以第十行第一个数是 $1+1+2+3+4+\cdots+9=46$，第二个数是 $46+11=57$，第三个数是 $46+11+12=69$，……，第八个数是 $46+11+12+13+\cdots+17=144$，所以自上至下第十行中第八个数是144。

练6　正方形框里的数，中间的数是所在那一行三个数的平均数，也是所在竖行、斜行的平均数，因此也是这九个数的平均数。而左上角至右下角这一斜行的三个数，前一个比后一个少8。

①由于 $100\div7=14\cdots\cdots2$，故100这个数处在横行第15行从左至右第二个位置上，于是此题有解。这九个数的和是 $(100+8)\times9=972$。

②$1557\div9+8=181$，又 $181\div7=25\cdots\cdots6$，所以181处在横行第26行从左至右第6个位置上，于是此题有解。最大的数是181。

第11讲　数字谜

秘籍修炼11

练1　(1)一个两位数乘5得两位数，那么十位只能是1；要使乘积最大，个位当然应该是9；即算式为 $19\times5=95$；那么，所填的四个数字之和为 $1+9+9+5=24$。

(2)$6\times52+4\times31$

练2　(1)高位分析，从“喜”到“学”依次考虑，并注意到“喜”、“爱”、“数”都不能等于0，所以“喜”$=1$，“爱”$=4$，“数”$=6$，“学”$=7$。

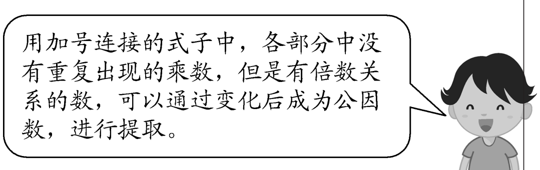
(2)两个四位数相加得到一个五位数，显然这个五位数的首位只能为1，所以可以确定 $t=1$，那么百

位不可能向千位进位，所以 $s+v=11$，十位向百位进了 1 位，所以 $v=t+t+1=3$，可得 $s=11-3=8$。又因为 $a+t=t$，所以 $a=0$，四位数 $\overline{tavs}$ 为 1038。

练 3 （1）由个位往前分析，容易得到第一个因数个位为 8，积十位为 7，第一个因数百位为 5，万位为 4，积万位为 3；即整个算式为 $47568\times7=332976$。

（2）由乘积个位得 5，那么被乘数的个位也必定是 5；由乘数的十位乘被乘数时十位为 0，可知乘数的十位是 4 或 8；由积的千位为 5，推得被乘数百位为 3，并由此推出乘数十位为 4；所以，算式为 $325\times47=15275$，即乘积是 15275。

练 4 （1）由商的十位乘 6□□得□□7，可知商的十位是 1，除数的个位是 7，商的十位与除数乘积的最高位是 6；又由商的个位乘 6□7 得□□61，可知商的个位是 3，除数的十位是 8，这个积是 2061。由此可得完整的除法算式。



（2）除数个位和商的十位有两种可能：$1\times3=3$ 或 $7\times9=63$，如果是后一种，那么只有 $39\times7=273$，但 $39\times2=78$ 是两位数，不符；所以只能是 $91\times3=273$，即除数是 91，商是 32，那么完整的算式为 $2919\div91=32\cdots\cdots7$，被除数是 2919。

练 5 九个方框中的数之和为 45，所以加数的数字之和是 $1+45=46$。和的数字之和是 $2+8=10$，进位的次数为 $(46-10)\div9=4$（次）。百位向千位进 1，个位向十位进 1，十位向百位进 2；要使加数中的四位数最小，尝试在它的百位填 1，十位填 2，此时另两个加数的百位只能填 3，4；则四位数的加数个位可填 5，另两个加数的十位可填 8，9，个位可填 6，7，符合条件，所以加数中的四位数最小是 1125。

练 6 （1）“好好好”=“好”$\times111$=“好”$\times3\times37$，100 以内 37 的倍数只有 37 和 74，所以“速算”或“巧算”中必有 1 个是 37 或 74，判断出“算”是 7 或 4。若“算”=7，则“好”=9，$999\div37=27$，所以，“速+巧+算+好”$=3+2+7+9=21$。若“算”=4，则“好”=6，$666\div74=9$，不是两位数，不符合题意。“速+巧+算+好”$=3+2+7+9=21$。

（2）首先可以确定 D 的值一定是 0，G 的值一定是 1，所以 $\overline{GOO}=\overline{BA}+\overline{BA}$，可见 $\overline{GOO}$ 为偶数，只能是 122，144，166，188，由于 $\overline{BAD}$ 不是 3 的倍数，$\overline{GOOD}$ 不是 8 的倍数，所以 $\overline{GOO}$ 不是 3 的倍数，也不是 4 的倍数，可以排除 144 和 188，再检验 122 和 166 可知只有 166 符合，此时 $\overline{BAD}$ 为 830，所以 $\overline{ABGD}$ 的值为 3810。

第 12 讲　位值原理与进制

秘籍修炼 12

练 1 （1）10000，100，10

（2）1000，100，10，1

（3）1000，10

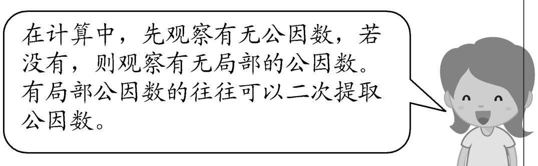
练 2 十进制下个位每个代表 1，十位每个代表 10，百位每个代表 100；

那么七进制下，“个位”每个代表 1，“十位”每个代表 7，“百位”每个代表 $7^2=49$。

$(364)_7=3\times7^2+6\times7+4\times1=193$。

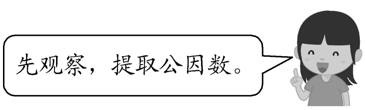
练 3 十进制下个位每个代表1,十位每个代表10,百位每个代表100;
那么六进制下,“个位”每个代表1,“十位”每个代表6,“百位”每个代表$6^2=36$。
$(542)_6=5\times6^2+4\times6+2\times1=206$。

练 4 八进制下“个位”满8就向“十位”进位,“十位”满8后就向“百位”进位,所以568除以8得到的余数就是八进制后的“个位”,得到的商继续除以8向前进位,得到的余数就是八进制后的“十位”,以此类推。



所以倒取余数,可以得到$568=(1070)_8$。

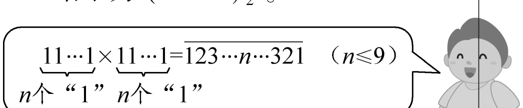
练 5 (1)列加法竖式,进位过程中逢9进1即可。
个位相加为11,其中9变为1进到十位,个位剩余2,以此类推,得到答案$(10082)_9$。



(2)列减法竖式,借位过程中借1当2即可。得到答案$(10110)_2$。

$$\begin{array}{r} 101101 \\ -\ \ 10111 \\ \hline 10110 \end{array}$$

练 6 (1)列乘法竖式$(101)_2\times(1011)_2=(110111)_2$,然后列减法竖式,得结果为$(11100)_2$。



(2)列除法竖式$(1011010)_2\div(110)_2=(1111)_2$。

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 110\,\overline{)\,1011010} \\ \underline{110} \\ 1010 \\ \underline{110} \\ 1001 \\ \underline{110} \\ 110 \\ \underline{110} \\ 0 \end{array}$$

第13讲 综合练习

秘籍修炼 13

练 1 (1)原式$=10+100+1000+10000+100000+1000000-2\times6$
$=1111110-12$
$=1111098$

(2)原式$=5\times(1+11+111+1111+11111+111111+1111111+11111111)$
$=5\times12345678$
$=61728390$

(3)因为$1+2+3+4+5+6+7=28$,
原式$=(28\times1000000+28\times100000+28\times10000+28\times1000+28\times100+28\times10+28\times1)\div7$
$=28\times1111111\div7$
$=28\div7\times1111111$
$=4444444$

练 2 (1)原式$=375\times(8\times7)\times13\times11$
$=(375\times8)\times(7\times13\times11)$
$=3000\times1001$
$=3003000$

(2)原式$=125\times25\times(0.8\times0.4\times0.4)\times39$
$=(125\times0.8)\times(25\times0.4)\times(0.4\times39)$
$=100\times10\times15.6$
$=15600$

练 3 (1)原式$=2008\times(2006-2005)-2007\times(2006-2005)$

$=2008-2007$

$=1$

（2）原式 $=2.5\times(32\div14+36\div21)$

$=2.5\times(32\div2\div7+36\div3\div7)$

$=2.5\times(16\div7+12\div7)$

$=2.5\times[(16+12)\div7]$

$=2.5\times(28\div7)$

$=2.5\times4$

$=10$

练 4 （1）原式 $=(71^2-67^2)+(63^2-59^2)+(55^2-51^2)+\cdots+(31^2-27^2)$

$=(71+67)\times(71-67)+(63+59)\times(63-59)+\cdots+(31+27)\times(31-27)$

$=(71+67+63+59+\cdots+31+27)\times4$

$=(71+27)\times12\div2\times4$

$=98\times6\times4$

$=2352$

（2）原式 $=(2008^2-2007^2)+(2006^2-2005^2)+(2004^2-2003^2)+(2002^2-2001^2)$

$=(2008+2007)\times(2008-2007)+(2006+2005)\times(2006-2005)+(2004+2003)\times(2004-2003)+(2002+2001)\times(2002-2001)$

$=2008+2007+2006+2005+2004+2003+2002+2001$

$=(2008+2001)\times8\div2$

$=4009\times4$

$=16036$

练 5 观察算式发现第一个式子可知 a 的小数部分是 0.6，所以 $\{a\}=0.6$，所以 $b=8.9-0.6=8.3$，

$[b]=8$，所以 $a=15.6-8=7.6$。

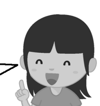
所以 $a=7.6$，$b=8.3$。

练 6 ① 第一组的第一个数是 1，第二组的第一个数是 $1+1=2$，第三组的第一个数是 $1+1+2=4$，第四组的第一个数是 $1+1+2+3=7$，……，第十组的第一个数是 $1+1+2+3+4+\cdots+9=46$。

② $46+47+48+\cdots+55=(46+55)\times10\div2=505$。

练 7 先看加法竖式的各位，四个“学”的和的个位是 2，“学”一定是 3（或 8，但在百位不成立，舍去），$4\times3=12$，和的个位是 2 向十位进 1。再看十位，十位上是“数 + 数 + 数”+ 进位的 1。和的十位上是 9，$6\times3+1=19$，“数”$=6$，和的十位写 9 向百位进 1。然后再看百位，百位上“爱 + 爱 + 进位的 1”和的百位是 9，“爱”一定是 4。显然千位上的“我”是 1。

$37\times3n=\overline{nnn}$（$n$是1~9的自然数）



“我”$=1$，“爱”$=4$，“数”$=6$，“学”$=3$，“（数 + 学 + 我）× 爱”$=(40)$。